International Society for Rock Mechanics
Mérnökgeológia-Kőzetmechanika 2008 Konferencia, Budapest

A tér nem abszolút — a téridő, mint a Galilei-féle relativitási elv következménye

Fülöp Tamás
Montavid Termodinamikai Kutatócsoport, Budapest

Ez az írás a Galilei*-féle relativitási elv tér- és időfogalomra vonatkozó következményeit foglalja össze, és ismerteti a* Galilei*-transzformáció által kijelölt négyes téridő-mennyiségek — négyesvektorok, négyestenzorok — jellemzőit.*

1. Bevezetés

A Galilei-féle relativitási elvből és a Galilei-transzformációból következik, hogy már a nemrelativisztikus vagy klasszikus — tehát a speciális és általános relativisztikus elvekkel még nem kompatibilis — fizikában is téridőről kell beszélnünk, és hogy minden fizikai elmélet általános elvi megfogalmazásánál és vizsgálatánál négyes mennyiségekkel (négyesvektorokkal, négyestenzorokkal) kell dolgoznunk. Ez vonatkozik tehát például a kontinuumfizikára is.

E következmények felismerése meg is történt, amikor arra megértek a tudománytörténeti feltételek. Az eredményeket ismertető alapművek [19, 4, 1, 5, 7] hatása azonban nem került bele a fizika általános köztudatába. Ez a lépés pedig szükséges és fontos lenne, és olyan szempontból is hasznos, hogy elkerülhető legyen például az a kontinuumfizikában és kinetikus fizikában több évtizede tartó vita, hogy „sérül-e az anyagi objektivitás elve, érvényesek-e a fizika törvényei minden vonatkoztatási rendszerben".

Az elterjedést gátló egyik tényező az lehetett, hogy a szóbanforgó következményekhez illeszkedő új matematikai formalizmus némi tanulmányokat igényel, és ez sokak számára elbátortalanítóan hathatott. Pedig a helyzet, egy hétköznapi példával élve, az autóvezetéshez hasonló: aki belefektet az autóvezetéshez szükséges sok furcsa mozdulat és odafigyelés megtanulásába, a tanfolyam végére elsajátított képességgel nagymértékben gazdagítja életének lehetőségeit. A szóbanforgó matematikai leírás is olyan gazdag *fizikai* rálátással ajándékozza meg az azt megtanulókat, ami a „tanfolyam" elején még egyáltalán nem látszik valószínűnek.

Mindazonáltal, hasonlóan a speciális relativitáselmélethez, a Galilei-féle nemrelativisztikus téridő-fogalomnak is lehetséges olyan tárgyalása, mely nem ebben a vonatkoztatásirendszer-mentes, affin teres matematikai formában történik, hanem egy „gyalogosabb” leírást használ, amelyben egy választott segéd-inerciarendszer szerinti négyes koordinátákban dolgozunk. Ez az egyszerűsített tárgyalás nem igényel új technikai hozzávalókat, egy koordinátákhoz szokott Olvasó könnyen fókuszálhat a tartalmi megállapításokra. Aztán, amikor már otthonosan mozog az új tudnivalók között, könnyebb az átlépés a vonatkoztatásirendszer-mentes leírásra — és az addig látottak fényében több is lesz a motiváció hozzá.

Ez az írás tehát koordinátás alakban ismerteti a Galilei-féle relativitási elvből következő tér- és időfelfogást, és a Galilei-transzformációból következő téridő négyes mennyiségeit — négyesvektorait, négyestenzorait. Ezzel kíván hozzájárulni a kontinuumfizika téridő szempontú modernizálásához. A kitűzött cél az, hogy a kontinuumfizika a jövőben magukra a kontinuumok jelenségeire összpontosíthasson, elhagyva azt a bezavaró technikai elemet, amit a kontinuumok szemlélése közben eddig használt (ti. a vonatkoztatásirendszer-függő leírást), és amely technikai elem — torzító szemüvegként — annyi fejfájást okozott mindezidáig, és zavarta a tisztánlátást.

2. Első lépés: a tér nem abszolút, téridőre van szükség

Ebben a szakaszban tömören, célratörően fogalmazzuk meg a szakasz címében megfogalmazott állítást. Az elhangzottak részletesebb fizikai kifejtése és tudománytörténeti értelmezése a következő szakaszban fog következni.

A tapasztalati úton felismert Galilei-féle relativitási elv azt mondja ki, hogy az egymáshoz képest mozgó inerciális (tehetetlenségi) vonatkoztatási rendszerek — azaz az olyan vonatkoztatási rendszerek, amelyek szerint egy magára hagyott test egyenes vonalú egyenletes mozgást végez, — egymással fizikailag egyenértékűek, nincs fizikai jelenség, mely az egyiket a másikhoz képest kitüntetné.

Tapasztalat továbbá, hogy a különböző inerciarendszerek egymáshoz képest egyenes vonalú egyenletes mozgással mozognak. A Galilei-transzformáció két egyszerű régi mozgástani tapasztalatot fogalmaz meg: ha van két inerciarendszerünk, $\mathcal{K}$ és $\mathcal{K}'$, ahol a második $\mathbf{V}$ sebességgel mozog az elsőhöz képest, és melyek idő- és térorigói úgy vannak összeillesztve, hogy $t = 0$-kor az $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ helyhez $t' = 0$ és $\mathbf{r}' = \mathbf{0}$ tartozik,[1] akkor egy tetszőleges, időben pillanatszerű és hely szempontból pontszerű történéshez/eseményhez a $\mathcal{K}$ szerint rendelt t és $\mathbf{r}$, valamint a $\mathcal{K}'$ szerinti t' és $\mathbf{r}'$ értékek között a következő átszámítási képletek érvényesek:

$$t' = t, \tag{1}$$
$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{V}t\,. \tag{2}$$

(Későbbi mérések kimutatták, hogy ezek a képletek csak a fénysebességnél jóval kisebb $\mathbf{V}$ esetén használhatóak, de most abban a jelenségkörben fogunk maradni, ahol nem lépnek fel fénysebességgel összemérhető nagyságú relatív sebességek.)

[1] Amikor inerciarendszereinkben Descartes-koordinátatengelyeket is választunk, akkor ezek irányait is össze fogjuk hangolni: az x' irány essen egybe az x iránnyal, az y' az y-nal, és a z' irány a z-vel.

Nos, az első képletről leolvasható, hogy eme tapasztalataink szerint az idő abszolút, mert a transzformációs képlet $t' = f(t)$ alakú.[2]

Hasonló szemmel ránézve, a második képletről pedig az olvasható le, hogy a tér nem abszolút, ugyanis a transzformációs képlet nem $\mathbf{r}' = g(\mathbf{r})$ alakú, hanem $\mathbf{r}' = g(\mathbf{r}, t)$ alakú.[3] Az is látható, hogy a térbe belekeveredik az idő is. Ha a térvektorokból szeretnénk konstruálni valami abszolút mennyiséget (olyan mennyiséget, amelyek halmazából már nem visz ki a Galilei-transzformáció), akkor az időt kell hozzákapcsolni valahogy. Ez megtehető úgy, ha a

$$\begin{pmatrix} t \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^0 \\ r^1 \\ r^2 \\ r^3 \end{pmatrix} \tag{3}$$

négydimenziós vektort képezzük.[4] Ilyen négyesvektor alakban a Galilei-transzformáció

$$\begin{pmatrix} t' \\ \mathbf{r}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ -\mathbf{V} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} \tag{4}$$

(ahol $\mathbf{I}$ a hármas egységtenzor, és blokkmátrix alakot használtunk), tehát a lehetséges négyesvektorok halmaza már abszolút: nem visz ki belőle a Galilei-transzformáció.

Abszolút téridő van tehát, és ezen belül abszolút idő, abszolút tér viszont nincs.

3. Tudománytörténeti értelmezés

Mint látjuk, az oly ártatlannak tűnő, bizonyos szemszögből szinte triviális Galilei-transzformációból pillanatok alatt egy sokak számára igencsak meghökkentő eredmény következik. Érdemes ezért áttekinteni a vonatkozó tudománytörténeti hátteret, hogy tisztábban lássuk a helyzetet.

Idézzük föl először is azt, ahogyan Galilei a róla elnevezett relativitási elvet megfogalmazta [3].[5]

„Zárkózzál be egy barátod társaságában egy nagy hajó fedélzete alatt egy meglehetősen nagy terembe. Vigyél oda szúnyogokat, lepkéket és egyéb röpködő állatokat, gondoskodjál egy apró halakkal teli vizesedényről is, azonkívül akassz fel egy kis vödröt, melyből a víz egy alája helyezett szűk nyakú edénybe csöpög. Most figyeld meg gondosan, hogy a repülő állatok milyen sebességgel röpködnek a szobában minden

[2] Sőt, az idő egydimenziós lévén, belátható, hogy ekkor szükségképpen $t' = t$. Többdimenziós esetben létezhetnek olyan lehetőségek, amilyet például majd a 3. lábjegyzet említ.

[3] Az egy adott inerciarendszerbeli térbeli forgatások $\mathbf{r}' = g(\mathbf{r})$ alakúak. Nem visznek ki tehát az összes helyvektorok halmazából. Ha csak rajtuk múlna, a tér abszolút lenne.

[4] Hogy az indexek miért nem alulra, hanem felülre lettek írva, az a 4. szakaszban lesz megindokolva.

[5] A tartalmi állítások mellett érdemes megfigyelni a szerző ama törekvését is, hogy a szöveg az elbeszélő forma ellenére is tudományosan igényes, körültekintő és átfogó legyen.

irányba, míg a hajó áll. Meglátod azt is, hogy a halak egyformán úszkálnak minden irányban, a lehulló vízcseppek mind a vödör alatt álló edénybe esnek. Ha társad felé hajítasz egy tárgyat, mind az egyik, mind a másik irányba egyforma erővel kell hajítanod, feltéve, hogy azonos távolságokról van szó. Ha, mint mondani szokás, páros lábbal ugrasz, minden irányba ugyanolyan messzire jutsz. Jól vigyázz, hogy mindezt gondosan megfigyeld, nehogy bármi kétely támadhasson abban, hogy az álló hajón mindez így történik. Most mozogjon a hajó tetszés szerinti sebességgel: azt fogod tapasztalni - ha a mozgás egyenletes és nem ide-oda ingadozó -, hogy az említett jelenségekben semmiféle változás nem következik be. Azoknak egyikéből sem tudsz arra következtetni, hogy mozog-e a hajó, vagy sem. Ha ugrasz, ugyanakkora távolságra fogsz jutni, mint az előbb, és bármily gyorsan mozog a hajó, nem tudsz nagyobbat ugrani hátrafelé, mint előre: pedig az alattad levő hajópadló az alatt az idő alatt, míg a levegőben vagy, ugrásoddal ellenkező irányban elmozdul előre. Ha társad felé egy tárgyat hajítasz, nem kell nagyobb erővel hajítanod, ha barátod a hajó elején tartózkodik, mint akkor, amikor hátul van. A cseppek éppúgy bele fognak hullani az alsó edénybe, mint előbb, egyetlenegy sem fog az edény mögé esni, pedig az, míg a csepp a levegőben van, több hüvelyknyi utat tesz meg. A halaknak sem kell az edényben nagyobb erőt kifejteni, hogy az edény elejére úszhassanak, és ugyanolyan könnyedséggel fognak a táplálék után menni, ha az edény bármely részén van is. Végül a szúnyogok és a lepkék is különbség nélkül fognak bármely irányba repkedni. Sohasem fog előfordulni, hogy a hátsó falhoz nyomódnak, mintegy elfáradva a gyorsan haladó hajó követésétől, pedig míg a levegőben tartózkodnak, el vannak választva tőle. Ha egy szem tömjént elégetünk, egy kevés füst képződik, mely felszáll a magasba és kis felhő gyanánt lebeg ott, és nem mozdul el sem az egyik, sem a másik irányba.”

A szöveget elemezve, a mozgásokat és egyéb fizikai jelenségeket valamilyen viszonyítási alaphoz (vonatkoztatási rendszerhez) képest szoktuk vizsgálni, mely valamilyen anyagi objektumokból épül fel, és ezekhez az anyagi objektumokhoz képest végezzük méréseinket. Ilyen viszonyítási alap lehet egy Földhöz rögzített szoba a falaival, padlójával és mennyezetével, például egy épületben egy kikötő partján, vagy egy világítótorony tetején. Vagy lehet ez a szoba egy hajóban is, mely a kikötő védett öblének csendes vizén kikötve nyugszik. De lehet egy egyenletesen mozgó hajóban is, miközben a védett öbölben kifele halad, vagy egy nyílt vízen haladó hajóban is, miközben olyanok a hajózási viszonyok, hogy nem ingadozik a hajó mozgása (például a kikötőből vagy világítótoronyból szemlélve). Lehet aztán egy hánykolódó hajóban is, vagy egy nagyerejű szélvihar miatt épp összedőlőfélben lévő világítótoronyban, vagy egy épp földrengést elszenvedő parti épületben. Ez utóbbi viszonyítási alapokban (vonatkoztatási rendszerekben) sajnos „hánykolódónak” fogjuk látni a jelenségeket, mert a viszonyítási alapunk, amihez képest mérünk, ide-oda hánykolódik. Ilyen viszonyok közepette pedig nehéz fizikailag hasznos következtetéseket leszűrni. Az előbb említett, békés viszonyok között létező viszonyítási alapok viszont jól, mégpedig Galilei fenti felismerése szerint *egyformán jól* használhatóak maguknak a jelenségeknek a megfigyelésére, és ezekben a jelenségek *egyformán* játszódnak le. Ezért, bár ezek a nyugodt viszonyítási alapok egymáshoz képest általában egyenes vonalú egyenletes mozgást végeznek, egyikük sem kitüntetett semelyik másikukhoz képest, egyetlen jelenség szempontjából sem.

Másrészt, felismerjük, hogy a magukra hagyott testek egyenes vonalú egyenletes mozgással haladnak.

Galilei ezt még csak a vízszintes mozgásokra mondta ki ([3], 146–148. o.), illetve az általános mozgások vízszintes részére — ismerte ugyanis a külöböző irányú mozgások függetlenségét ([16], 173. o.) —, mert gondja volt a szabadon eső testekkel, melyek ugye szintén magukra hagyottnak mutatkoznak. Ugyanezekben az 1630-as években Descartes viszont már általános érvénnyel fogalmazta meg ezt az állítást ([16], 183. o.), ő már a szabadesés mögé is egy bizonyos, szemmel nem látható és közvetlenül nem nyomon követhető, de fizikai hatást tételezett fel ([16], 185. o.).

Az pedig, hogy a magukra hagyott testek egyenes vonalú egyenletes mozgása milyen vonatkoztatási rendszer szerint értendő, az eddigiek alapján kézenfekvő: az említett békés, nyugodt viszonyítási alapok szerint.[6] Az alapján, hogy a magukra hagyott testek mozgását tehetetlenségi mozgásnak szokták hívni, ezeket a nyugodt viszonyítási alapokat tehetetlenségi/inerciális vonatkoztatási rendszereknek nevezhetjük.

Ami a Galilei-transzformációt illeti, az először is az abszolút időt mint kísérleti tényt fejezi ki.[7] Ezután pedig úgymond egyszerű geometriáról van szó: a $\mathcal{K}$ rendszer maga is látja, hogy a $\mathcal{K}'$ rendszer milyen helyvektort mér, és látja, hogy eme t időpillanatban a $\mathcal{K}'$ rendszer origója hol jár, így maga $\mathcal{K}$ is ki tudja számolni, hogy milyen helyvektort kell $\mathcal{K}'$-nek kapnia.

A szabadesésre aztán Newton adott mennyiségileg is sikeres értelmezést, tömegvonzás-elméletével. A tapasztalathoz jól illeszkedő gravitációs erőtörvénye azonban pillanatszerűen terjedő távolhatást jelentett. Ezt Newton — amellett, hogy egy fizikailag zavaró és nehezen hihető aspektusnak találta, — csak úgy tudta elképzelni, hogy feltételezte egy abszolút tér (és így egy kitüntetett inerciarendszer) fogalmát. Hogy miért is érezte szükségét ennek a hipotézisnek, az (legalábbis a közismert tudománytörténeti értékelésekből) nem világos. Lehetséges, hogy *fizikai* okból, mert az abszolút teret egyfajta közvetítő közegnek gondolta, egy gravitációs éternek (az elektromágneses hullámok terjedését biztosító közeg, az elektromágneses éter később megszületett elképzeléséhez hasonló szóhasználattal élve). De az is lehet, hogy *matematikai* okból, mert nem tudott elképzelni más matematikai lehetőséget a pillanatszerű távolhatás megfogalmazására.

Mai szemmel nézve, ami az első lehetőséget illeti, az elektromágneses éter fogalmának elvetése óta a fizika gravitációs éter szükségességét sem igényli. A második lehetséges indok ügyében pedig a későbbiekben látni fogjuk (28. oldal), hogy a pillanatszerű távolhatás leírásához valójában nem szükséges abszolút tér, csak az abszolút térszerűség (abszolút egyidejűség) fogalma. Már kortársa, Leibniz is bírálta Newtont, hogy az általa vélelmezett abszolút tér, így az abszolút inerciarendszer a tapasztalatoknak megfelelő Galilei-féle relativitási elv miatt semmilyen módon

[6] Egyébként ha egyikükben egyenes vonalú egyenletes a mozgás, akkor már a többiben is, hiszen ez sem különböztetheti meg egyik nyugodt viszonyítási alapot a többihez képest.

[7] A hajózás volt a fő mozgatóereje a minél pontosabb, és a hajók hánykolódásának minél jobban ellenálló, minél zavartalanabbul járó és megbízhatóbban működő órák kifejlesztésének. Ennek eredményeként az is kísérleti tapasztalat lett, hogy az idő még a hánykolódó (nemtehetetlenségi) vonatkoztatási rendszerekben is ugyanúgy telik, ahogy az inerciarendszerekben.

nem mutatható ki, tehát fizikailag helytelen feltételezés ([16], 227. o.). A problémát Newton is látta, de csak addig jutott el, hogy példát adott egy tehetetlenségi vonatkoztatási rendszer és egy nemtehetetlenségi megkülönböztetésére,[8] továbbá hogy egy bizonyos misztikus feltételezést fogalmazott meg, miszerint „a világ igen távoli részében nagy tömegek vannak, amelyek rögzítik az abszolút teret” ([16], ugyanott). Az utókor közfelfogása azonban, a newtoni dinamika és gravitációelmélet sikerei miatt — Galilei felismerése és Leibniz intelme ellenére — a newtoni abszolút tér fogalmát is készpénzként vette át.

A téridő fogalmának megalkotása azonban nemcsak emiatt bizonyult nehéznek. A geometria Euklidesz óta évszázadokon át euklideszi teret jelentett. E felfogás miatt a vektorok nemcsak vektorteret alkottak (melyben mindössze összegük és számszorosuk van értelmezve), hanem euklideszi vektorteret, ahol a vektoroknak hosszuk és bezárt szögük, vagy ezzel ekvivalens módon: pozitív definit skalárszorzatuk is van. Erre a helyzetre Bolyai és Lobacsevszkij nemeuklideszi geometriára vonatkozó, továbbá Gauss és Riemann görbült geometriákra vonatkozó eredményei voltak aztán fellazító hatásúak. Ezáltal a geometria az általában görbült, helyileg euklideszi jellegű sokaságok fogalmáig általánosodott, de nem tovább.

Ezzel párhuzamosan az is időbe telt, míg az egy- a két- és a háromdimenziós euklideszi tér megismerése után a matematika értelmezte a négy- és többdimenziós euklideszi terek fogalmát. A háromnál magasabb dimenziós terek ráadásul értelmezésük után is megmaradtak matematikai kuriózumként, részben mert gyakorlati hasznuk nem látszott, részben pedig mert a közfelfogás számára túl absztrakt, a szemlélet számára oly nehezen felfogható geometriai képződmények. Márpedig a téridő fogalmához a dimenziószám tekintetében is a gondolkodás fellazítására volt szükség.

A következő felkavaró történés a fizikában következett be: a speciális relativitáselmélet megszületése. Közvetett, majd később közvetlen alátámasztást nyert, hogy az idő sem abszolút, az egyenértékű inerciarendszerek váltásakor idő és tér egyaránt keverednek egymásba. Az abszolút téridő fogalma azonban még ennek felismerése után is csak akkor született meg, amikor Minkowski felismerte, hogy ha az i képzetes egység, a c fénysebesség és a t időkoordináta szorzataként bevezeti az x^1, x^2, x^3 térkoordináták mellett az $x^4 = ict$ képzetes koordinátát, akkor a Lorentz-transzformáció (a Galilei-transzformáció relativisztikus változata) eme négydimenziós térben forgatásokat jelent, ezek a vektorok egy négydimenziós euklideszi vektorteret alkotnak. Fontos egyből leszögezni, hogy a képzetes időkoordináta mögött semmi fizikai mélység nincs, ez egy tartalmilag félrevezető és roppant zavaró, pusztán technikailag kiizzadt konstrukció, acélból, hogy egy euklideszi skalárszorzatot, azaz egy euklideszi szerkezetet kapjunk.

Így, hogy egy euklideszi szerkezet bukkant elő, a tudomány végre elkezdett a téridőre mint geometriai objektumra gondolni. Később, amikor elkezdték vizsgálni,

[8] Egy forgó vödörben kialakuló vízfelszín nem-vízszintes voltára mutatott rá. Egy általánosabb, bár elsőre kissé vulgárisan hangzó megfogalmazással azt mondhatnánk, hogy „inerciarendszer az, amelyhez rögzítve nem szédülünk”. Az ember egyensúlyérzékelő szervének műszaki, egyre nagyobb érzékenységű reprodukálásával valóban egyre pontosabban ki tudjuk mutatni egy mozgás tehetetlenségi vagy nemtehetetlenségi voltát.

hogy az *ict* koordináta esetén adódó euklideszi skalárszorzat a valós *ct* koordináta esetén minek felel meg, kiderült, hogy az euklideszi skalárszorzat-fogalom egy olyan általánosításának, mely nem pozitív definit (pszeudo-euklideszi skalárszorzat/belső szorzat, azaz egy nemdegenerált, szimmetrikus, bilineáris leképezés). Így ez a szerkezet is fokozatosan belekerült az elfogadott geometriai lehetőségek közé.

A nemrelativisztikus téridő azonban két további vonatkozásban is még általánosabb fogalom, mint a speciális relativisztikus téridő. Általánosabb egyrészt abból a szempontból, hogy a GALILEI-transzformáció semmilyen bűvészkedéssel nem fogható fel euklideszi forgatásként, vagy annak pszeudo-euklideszi megfelelőjeként. Egy négydimenziós euklideszi szerkezet helyett, mint a későbbiekben konkrétan látni fogjuk, egy egydimenziós abszolút idő-szerkezet, továbbá egy, az abszolút térszerű négyesvektorokra értelmezett háromdimenziós euklideszi szerkezet van rajta.[9]

A másik általánosabb aspektus pedig az, hogy — mint azt a (3) képletről leolvashatjuk, — különböző fizikai dimenziójú mennyiségeket kell összetennünk egy négyes mennyiséggé. A három távolság dimenziójú koordináta mellé egy idő (időtartam) dimenziójút kell helyeznünk. Relativisztikusan ez ügyben könnyű a dolgunk, mert a fénysebesség egy fizikailag kitüntetett megfeleltetést jelent távolság és időtartam között, ezért az $x^0 = ct$ választással élve egyenlő dimenziójú mennyiségeket helyezünk egymás mellé. Nemrelativisztikusan azonban nincs ilyen lehetőségünk. Ezért az euklideszi előzmények fényében roppant formabontónak mutatkozik ez a lépés.

A formabontó aspektus mellett azonban egyből felvetődik az a kérdés is, hogy egyáltalán meg lehet-e ezt a lépést konzisztensen tenni, nem jutunk-e az eltérő dimenziók miatt valahol fizikai ellentmondásba? A válasz az, hogy nem, ehhez pedig először is nézzük meg, hogy miért is merül fel ez a kérdés. Mint már elhangzott, annak megfelelően, hogy a geometria sokáig euklideszi geometriát jelentett, a vektorok fogalmához nemcsak a ma vektortér-tulajdonságnak hívott aspektusaik (a vektorok összege és számszorosa) tartoztak hozzá, hanem euklideszi tulajdonságuk is (hosszuk és bezárt szögük, ill. az ezzel ekvivalens euklideszi skalárszorzatuk). Eltartott egy ideig a matematikatörténetben, míg különvált a vektortér fogalma az euklideszi vektortér fogalmától. A nemrelativisztikus téridő vektoraira nem kell euklideszi tulajdonság, csak a vektortér-tulajdonság, a vektorok összege és számmal való szorzata pedig mindketten tiszteletben tartják, ha a vektor különböző komponensei különböző dimenziójúak. Nemrelativisztikusan a két ezen felüli szerkezet (a már említett abszolút idő-szerkezet, és a térszerű négyesvektorok háromdimenziós euklideszi szerkezete) pedig, mint majd látni fogjuk, szintén tiszteletben tartják, hogy az időkoordináta más dimenziójú, mint a térkoordináták. Egy gyors megnyugtatást már most is adhatunk: a (4) GALILEI-transzformáció konzisztens módon tiszteletben tartja a a dimenziók különbözőségét, ahol keveredés van, ott a $\mathbf{V}$ a megfelelő módon viszi egymásba a dimenziókat [ha (2)-re nézünk, r'-be $\mathbf{V}$ révén a megfelelő dimenzióra hozva keveredik bele a t koordináta]. Márpedig a nemrelativisztikus téridő nem jelent mást, mint a GALILEI-transzformáció következményeit. Ezért nyugodt lélekkel várhatjuk, hogy a nemrelativisztikus téridő olyan lesz, hogy a dimenziók különbö-

[9] Amikor a speciális relativisztikus téridőn végrehajtjuk a(z alkalmas értelemben vett) nemrelativisztikus határátmenetet, akkor a speciális relativisztikus négyes pszeudo-euklideszi szerkezet erre a két nemrelativisztikus szerkezetre vezet, e kettőre esik szét.

zőségét tiszteletben fogja tartani.

Mindenesetre látható, hogy a nemrelativisztikus téridő fogalmának bevezetését mind az euklideszi (és pszeudo-euklideszi) elvárás, mind az azonos dimenziók elvárása hátráltatja. Weyl [19] lépett túl először ezeken a beidegződéseken, és ő vezette be a nemrelativisztikus téridő matematikailag és fizikailag egyaránt kielégítő értelmezését.

Weyl tárgyalása azonban még egy harmadik régi, szintén roppant erős hittel is szakított: hogy a tér- és időszerű történések csak egy koordinátarendszer, és csak egy vonatkoztatási rendszer szemszögéből lennének leírhatóak. Ez a hit részben megszokáson, részben pedig tekintélyelven alapulhatott: egyrészt mindenki ezt gondolta az egyetlen lehetőségnek, senki nem tudott kidolgozni más megközelítést, másrészt ha Galilei és a többi nagy előd is így gondolkozott — nem is beszélve Newton abszolút teréről —, akkor a közfelfogás ezt szentesítette.[10] Még Einstein is, aki pedig igazán öntörvényű bátorsággal lazított fel felfogásokat, ha azok a tapasztalatoknak vagy a következetes gondolkodásnak ellentmondtak, élete végéig inerciális koordinátarendszereken át szemlélte a speciális relativitáselméletet (és az általános relativitáselméletet is koordinátarendszereken keresztül).

Weyl tárgyalásmódja az, ahol a matematikai forma végre pontosan a fizikai tartalmat fejezi ki, nem mást, nem többet és nem kevesebbet. A téridőről a fizika története során kialakult összes tapasztalatunk és konzisztens elképzelésünk helyet kap benne, az így-úgy kialakult inkonzisztens beidegződések pedig nem. A leírásmód összes matematikai szereplője fizikai tartalommal bír, nincsenek pusztán technikai vagy kényelmi szempontból bevezetett segéd-elemek. A Weyl-látásmóddal a téridő[11] pontosan annak látszik, amit a fizika valójában kiderített róla.

Weyl téridő-leírását például Jaglom vizsgálta a geométer matematikus szemszögéből [4], Arnold ismertette a mechanika művelőivel [1], a fizikus számára szükséges elvi és gyakorlati részletekig menő kidolgozását Matolcsi adta meg [5, 7], az egyes fizikai területeken való alkalmazásokról pedig Matolcsi, Ván és mások értek el eredményeket [6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 2].

Mint az a Bevezetésben már elhangzott, a Weyl kezdeményezte leírás bizonyos matematikai hozzávalókat igényel. Ezért ebben az írásban a téridő egy formailag-technikailag egyszerűbb megközelítésben kerül ismertetésre, hogy ne kelljen megkövetelni az Olvasótól ezeket a matematikai ismereteket. Egy választott segéd-inerciarendszer szemszögéből, választott idő- és térorigó, valamint Descartes-koordináták révén a téridővektorokat koordinátákkal, a téridőpontokat pedig az idő- és térorigó alkotta téridő-origóból hozzájuk húzott téridő-vektorokkal (tehát szintén koordinátákkal) jellemezzük.[12] Így ez a leírás nem fog rendelkezni a Weyl-féle meg-

[10] Természetes, hogy a maga korában Descartes koordinátarendszere nagy fejlődést jelentett. A térvektorok és tenzoraik koordinátafüggetlen felfogása azonban nagy elvi értékű, rálátást nyújtó fejlemény volt. Hasonlóan nagyértékű vívmány a Weyl-i vonatkoztatásirendszer-mentes felfogás is.

[11] mind a nemrelativisztikus, mind a speciális relativisztikus, ugyanis mindkettő koordináta- és vonatkoztatásirendszer-mentes leírását megadta

[12] Tárgyalásunk olyan szempontból is leegyszerűsítő lesz, hogy nem teszünk különbséget hármas vektor és koordinátázott alakja között.

közelítés bizonyos elvi–lényegi értékeivel, de közvetett eszközeivel azért képes lesz a nemrelativisztikus téridő összes tulajdonságának bemutatására.

4. További ismerkedés a téridővektorokkal

A 2. szakaszban formailag leolvasott állítást — miszerint a tér nem abszolút, — az előző szakasz fizikai magyarázatait felhasználva képlet nélkül is felismerhetjük, például a most következő gondolatmenet útján. A 14. oldalon bemutatott módon, egy viszonyítási alap (vonatkoztatási rendszer)[13] a gyakorlatban mindig valamilyen anyagi objektumok által van kijelölve. Ilyenek egy szoba falai, padlója és mennyezete. A szoba mint vonatkoztatási rendszer térpontjai azok a pontok, melyek a szobához képest nyugszanak. Ez a szoba lehet egy kikötőparti épületben, de lehet egy a vízen haladó hajóban is. Eszerint ha például egy hajó belsejében levő szobában az asztalon egy kis piros rubinkő nyugszik, akkor ez a rubinkő (ha elegendően kicsi), akkor a hajóbeli szoba mint vonatkoztatási rendszer egy térpontját jelöli ki. Legyen ennek a szobának a falán egy ablak, és haladjon el a hajó mellett egy másik hajó, amelynek szintén van egy belső szobája, és azon szintén van egy ablak. Legyen olyan szerencsés az elrendezés, hogy a másik hajóban az ablakon kikukucskálva pont belátunk az első hajó szobájába annak ablakán át, és láthatjuk az asztalon a rubinkövet. A másik hajó mozogni látja ezt a rubinkövet — hiszen az együtt mozog a hajójával együtt —, tehát a másik hajó számára a rubinkő nem egy térpontot jelöl, hanem egy mozgást, egy időfüggő helyű folyamatot ír le. Eközben az első hajó továbbra is joggal ragaszkodik hozzá, hogy őneki pedig ez a rubinkő egy térpontot jelöl ki. Ami tehát térpont egy vonatkoztatási rendszer számára, az egy hozzá képest mozgó másik számára nem térpont. A tér nem abszolút.

Ezután folytassuk az ismerkedést a téridővektorokkal, melyeket a továbbiakban négyesvektoroknak is fogunk hívni. Ez ügyben illő először is magyarázatot adni a 2. szakaszban bevezetett két konvencióra. Az egyik, hogy az időt nem mint negyedik, hanem mint nulladik koordinátát ragasztottuk hozzá a helyvektorhoz. Ennek két oka van: egyrészt kerülni akarjuk a rossz emlékű, Minkowski-féle $x^4 = ict$ konvencióhoz való hasonlatosságot. Másrészt így jobban kifejezzük, hogy nem egy további euklideszi típusú koordinátát vezettünk be, hanem egy más fizikai természetűt, melynek még a fizikai dimenziója (durván szólva: a mértékegysége[14]) is más, mint a helykoordinátáké.

A másik konvenció, amely magyarázatot érdemel, az, hogy a koordináták miért felső indexet kaptak. Ennek oka az, hogy a téridővektorok mellett hamarosan fel fognak bukkanni az ún. téridő-kovektorok is (a kovektor fogalmának értelmezését ld. majd ott). A hármas vektorok esetén vektor és kovektor között természetes azonosítás van,[15] az euklideszi skalárszorzat révén, ezért a hármas mennyiségek körében nem is szoktak szóba kerülni a hármas kovektorok. A négyesvektorok és a négyes

[13] A szakirodalomban előfordulnak a „megfigyelő”, és a „megfigyelő-mező” elnevezések is.

[14] Hasonlóan a téridő vonatkoztatásirendszer-mentes tárgyalásához, a fizikai dimenzióval rendelkező mennyiségeknek — távolságoknak, időtartamoknak, tömegértékeknek, stb. — is létezik mértékegységmentes tárgyalása. Ezt Matolcsi adta meg (ld. [7]).

[15] Ezt az azonosítást a 18. lábjegyzet fogja majd elmagyarázni.

kovektorok között azonban nincs, és a relativitáselméletben kialakult hagyományt követve mi is itt úgy fogjuk megkülönböztetni a négyesvektort és a négyes kovektort, hogy előbbi felső, utóbbi alsó indexeket kap.

Ízlelgessük akkor most tovább a téridőn való életet és a négyesvektorokat.

Annak megfelelően, hogy hely és idő a $\binom{t}{\mathbf{r}}$ módon olvad össze, egy pontszerű test $t \mapsto \mathbf{r}(t)$ mozgásának négyes megfelelője a

$$t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ \mathbf{r}(t) \end{pmatrix} \tag{5}$$

négyesvektor értékű függvény lesz. Ez írja le a pontszerű test téridőbeli sorsát, ez a függvénygörbe a test világvonala (a relativitáselmélet szóhasználatával élve).

Ha idő szerint deriváljuk ezt a függvényt, a

$$t \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ \dot{\mathbf{r}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{v}(t) \end{pmatrix} \tag{6}$$

eredményt kapjuk. Mivel egy négyesvektort deriváltunk egy négyes-skalár (a Galilei-invariáns abszolút idő) szerint, ez az eredmény minden időpillanatban egy négyesvektor kell legyen (amint az egyszerűen belátható). Ha, ezt ellenőrizendő, direktben végrehajtjuk rajta a $\mathcal{K}$ inerciarendszerről a $\mathcal{K}$-hoz képest $\mathbf{V}$ sebességgel mozgó $\mathcal{K}'$-re áttérés Galilei-transzformációját, azt kapjuk, hogy

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{v}(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{v}(t) - \mathbf{V} \end{pmatrix}, \tag{7}$$

ami tényleg a várt eredmény (a nemrelativisztikus sebesség-összetevési formula). Leszűrhetjük ebből, hogy a hármas $\mathbf{v}$ sebességekhez az

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^0 \\ v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} \tag{8}$$

négyessebesség rendelődik hozzá.[16] Ebből az is következik, hogy az $m\mathbf{v}$ hármas lendület négyes megfelelője az $\binom{m}{m\mathbf{v}}$ négyesvektor.

Deriváljuk (6)-ot még egyszer: ekkor a

$$t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ \ddot{\mathbf{r}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\mathbf{v}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{a}(t) \end{pmatrix} \tag{9}$$

[16] A relativitáselméletben általában nem r, hanem x betűt használnak a négyesvektorok jelölésére, és v helyett u-t a négyessebességekére. A kontinuumfizikában azonban $\mathbf{u}$ a hármas elmozdulásvektor-mezőt szokta jelölni, mely szintén kinematikai jellegű mennyiség, így a relativisztikusan megszokott jelölésből a kontinuumfizikában nagy zavar keletkezne. Ezenkívül fogalmilag szerencsésebbnek tűnik, ha ugyanolyan betűt használunk a hármas vektorkoordinátákra és négyesre kiegészítettjükre. (Ez ráadásul jelöléstechnikailag is gazdaságosabb.)

négyesvektor-függvényt kapjuk. Ez tehát a négyesgyorsulás vektor. Ez a GALILEI-transzformációra nézve invariánsnak bizonyul:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{a}(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{a}(t) \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Következmény, hogy a tömegpont mechanikai NEWTON-egyenletének, $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$-nek a négyes megfelelője az

$$m\begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{F} \end{pmatrix} \tag{11}$$

négyesvektor-egyenlet, a hármas erő négyes megfelelője pedig a

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{F} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{F} \end{pmatrix} \tag{12}$$

tulajdonságú négyeserő-vektor. (Maga az, hogy az **a** hármasgyorsulás és az **F** hármaserő invariánsak a GALILEI-transzformációra, természetesen régről ismert. Itt most csak négyes aspektusukkal ismerkedünk meg.)

5. Négyes kovektorok, négyestenzorok

Ettől a ponttól kezdve a képletek zömét indexes alakban lesz kényelmes megadni. Ezért most vegyük sorra az indexes képletekben alkalmazott konvenciókat.

1. Az i, j, k indexek hármas indexeket fognak jelölni, azaz 1-től 3-ig vehetnek föl értékeket.
2. Az a, b, c indexek négyes indexeket fognak jelölni, azaz 0-tól 3-ig vehetnek föl értékeket.
3. Az indexekre való összegzéskor alkalmazni fogjuk az EINSTEIN-konvenciót: a kétszer előforduló indexek esetén nem írjuk ki az összegzést, tehát a kétszer előforduló indexek esetén automatikusan összegzés értendő — az i, j, k indexekre 1-től 3-ig, az a, b, c indexekre pedig 0-tól 3-ig, azaz például

$$f^i g^i \equiv \sum_{i=1}^{3} f^i g^i, \tag{13}$$

és

$$p_a Q^{ab} \equiv \sum_{a=0}^{3} p_a Q^{ab}. \tag{14}$$

Indulásként írjuk föl a négyesvektorok GALILEI-transzformációját, és a transzformáció inverzét indexes alakban:

$$r^{0\prime} = r^0, \qquad r^{i\prime} = r^i - V^i r^0, \tag{15}$$

$$r^0 = r^{0\prime}, \qquad r^i = r^{i\prime} + V^i r^{0\prime}. \tag{16}$$

Az alább következő további mennyiségfajták transzformációs szabályaira is érvényes lesz az az egyszerű szabály, hogy az inverz transzformáció képletét úgy kaphatjuk meg az eredetiből, hogy abban minden vesszőtlen koordinátát vesszősre cserélünk és fordítva, $\mathbf{V}$ helyére pedig $-\mathbf{V}$-t helyettesítünk.

Következő lépésként vezessük be a négyes kovektor fogalmát. Mint kovektor alatt általában, itt egy olyan lineáris leképezést értünk, mely minden vektorhoz — esetünkben: minden négyesvektorhoz — egy valós számot rendel. Annak megfelelően, hogy a vektorokat egyoszlopos $\begin{pmatrix} r^0 \\ r^1 \\ r^2 \\ r^3 \end{pmatrix}$ mátrixba írjuk, a kovektorokat egysoros $\begin{pmatrix} k_0 & k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix}$ mátrixszal, a hatásukat pedig a szokásos mátrixszorzással reprezentálhatjuk:

$$k_a r^a = \begin{pmatrix} k_0 & k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r^0 \\ r^1 \\ r^2 \\ r^3 \end{pmatrix} \tag{17}$$

Ahogy az már említésre került, ezeknek a k_a négyeskovektor-koordinátáknak alulra írjuk az indexét, megkülönböztetésül a négyesvektoroktól. A megkülönböztetés fontos, mint azt mindjárt látni fogjuk: vezessük ugyanis le a kovektor-koordináták inerciarendszer-váltásra való transzformálódását. A követelmény az, hogy a kovektor hatása egy invariáns Galilei-skalár legyen. (Ekkor fogjuk Galilei-kovektornak tekinteni.)

$$\begin{aligned}
(k_a r^a)' &\equiv {k_a}' {r^a}' = {k_0}' {r^0}' + {k_1}' {r^1}' + {k_2}' {r^2}' + {k_3}' {r^3}', \quad \text{továbbá} \\
&= k_a r^a = k_0 r^0 + k_1 r^1 + k_2 r^2 + k_3 r^3 = \\
&= k_0 r^{0\prime} + k_1 \big(r^{1\prime} + V^1 r^{0\prime}\big) + k_2 \big(r^{2\prime} + V^2 r^{0\prime}\big) + k_3 \big(r^{3\prime} + V^3 r^{0\prime}\big) = \\
&= \big(k_0 + V^1 k_1 + V^2 k_2 + V^3 k_3\big) r^{0\prime} + k_1 r^{1\prime} + k_2 r^{2\prime} + k_3 r^{3\prime},
\end{aligned} \tag{18}$$

ahol a második sorban a követelményünket használtuk fel, a harmadik sor pedig (16) révén adódott. Követelményünknek minden r^a-ra, így minden ${r^a}'$-re teljesülnie kell. Ezért az első és az utolsó sor egyenlőségének minden ${r^0}'$, ${r^1}'$, ${r^2}'$, ${r^3}'$ esetén fenn kell állnia. Következésképp ${r^0}'$, ${r^1}'$, ${r^2}'$, ${r^3}'$ első sorbeli együtthatóiknak rendre meg kell egyezniük az utolsó sorbeli együtthatóikkal. Innen leolvashatjuk, hogy

$${k_0}' = k_0 + V^i k_i\,, \qquad {k_i}' = k_i\,, \tag{19}$$

vagy hármasvektor-jelöléssel

$${k_0}' = k_0 + \mathbf{V}\mathbf{k}\,, \qquad \mathbf{k}' = \mathbf{k}\,. \tag{20}$$

Láthatjuk tehát, hogy a négyeskovektor-koordináták máshogy transzformálódnak, mint a négyesvektor-koordináták. A négyes kovektorok lényegileg másfajta mennyiségek, mint a négyesvektorok. Erre a megkülönböztetésre utal az a néhol alkalmazott szóhasználat is, amely a vektorkoordinátákat kontravariáns, a kovektor-koordinátákat kovariáns koordinátáknak nevezi.[17]

A fizikából ismert nevezetes példa négyes kovektorra az $f(\mathbf{kr} - \omega t)$ alakú síkhullámokban szereplő ω körfrekvencia és $\mathbf{k}$ hullámszámvektor által alkotott $\begin{pmatrix} -\omega & \mathbf{k} \end{pmatrix}$ négyes mennyiség. Valóban, az f függvény hasában szereplő

$$\mathbf{kr} - \omega t = (-\omega)t + \mathbf{kr} \tag{21}$$

kombináció inerciarendszer-független, azaz Galilei-skalár kell legyen. Ezért $\begin{pmatrix} -\omega & \mathbf{k} \end{pmatrix}$ egy négyes kovektort kell alkosson. Ezért transzformációs képlete (20)-nak megfelelő kell legyen. Eszerint a hármas hullámszámvektor invariáns marad, a körfrekvencia pedig egy, a $\mathbf{V}$ áttérési sebességgel arányos eltolódást szenved. Ez az eltolódás pedig nem más, mint pontosan a jól ismert Doppler-effektus.

Térjünk át ezután a négyestenzorokra. Egy euklideszi vektortér — mint a megszokott hármas térvektoroké — esetén a tenzorok egyszerűen a vektorokat vektorokba vivő lineáris leképezések, illetve, az euklideszi szerkezet révén ezzel ekvivalens módon, a bármely két vektorhoz valós számot rendelő bilineáris (mindkét változóban lineáris) leképezések. A négyesvektorok esetén nincs sem euklideszi, sem más kitüntetett szerkezet, mely a négyesvektorokat a négyes kovektorokkal azonosítja[18] (eltérő transzformációs tulajdonságuk miatt ilyen megfeleltetés egyszerűen nem lehetséges), és ahogy vektorból kétfajta adódik, ennek megfelelően tenzorokból négyfajta változat létezik. Ha a tenzorokra mint vektor-féleségből vektor-féleséget készítő leképezésre gondolunk, akkor két lehetőség az, hogy vektorra vagy kovektorra hat-e, az ettől független másik két lehetőség pedig az, hogy a leképezés eredménye vektor-e avagy kovektor. Ha pedig a tenzorokat bilineáris, szám értékű leképezésként fogjuk föl, akkor az egyik változó is kétféle lehet: vektor vagy kovektor, és ettől független módon a másik változó szintén lehet vektor vagy kovektor. Az indexes írásmódban a négyféle lehetőséget a tenzor két indexének alsó ill. fölső helyzetével tudjuk megkülönböztetni.

Vegyük sorra egyesével a négy lehetőséget. Annak megfelelően, hogy a felülindexesen jelölt r^a négyes vektorokat egyszerűen vektornak hívhatjuk (mely egyszerűbb, mint a kontravariáns típusú vektor elnevezés), a T^{ab} mindkét indexében kontra-

[17] Az inerciarendszer-váltó Galilei-transzformáció mellett megvizsgálhatjuk az egy inerciarendszeren belüli térbeli forgatásra való transzformációt is. Az derül ki, hogy ilyenkor a négyeskovektor-koordináták a négyesvektor-koordinátákkal azonos képlet szerint transzformálódnak: a nulladik komponens invariáns marad, a térszerű koordináták pedig a hármasvektorokkal azonos módon transzformálódnak. Ez fog öröklődni a hamarosan bevezetésre kerülő tenzorokra, kotenzorokra és vegyes tenzorokra is. Ezért a továbbiakban a forgatásokkal nem foglalkozunk, csak az inerciarendszer-váltás nemtriviálisabb aspektusával. Megemlítendő emellett az is, hogy a tértükrözés- és időtükrözés-transzformációk behozzák a pszeudoskalár, négyes pszeudovektor, stb. mennyiségeket is. Ezeknek azonban kevés szerep jut a nemrelativisztikus fizikában, ezért e helyütt ezek ismertetésére nem kerül sor.

[18] A vektor és kovektor közti azonosítás, koordinátás nyelven elmagyarázva azon alapszik, hogy egy kovektornak vektorra való hatását és két vektor euklideszi (vagy pszeudo-euklideszi) skalárszorzatát egyaránt lehet egy sormátrix és egy oszlopmátrix mátrixszorzataként reprezentálni. Ezt az azonosítást műveljük ösztönösen, amikor két vektor euklideszi skalárszorzatát úgy számítjuk ki mátrixszorzatként, hogy az egyik vektor komponenseit oszlopmátrixból sormátrix alakba rendezzük át. Ezzel ugyanis vektorból kovektorba alakítjuk át.

variáns (mindkét változójában kovektorra ható bilineáris) mennyiséget egyszerűen tenzornak, négyestenzornak hívhatjuk. Amikor bilineáris mennyiségként tekintünk rá, két négyes kovektorra hat, és azt követeljük meg, hogy a $T^{ab}k_a l_b$ alakú eredmény GALILEI-skalár legyen. Amikor pedig egyváltozós, lineáris leképezésként szemléljük, akkor egy négyes kovektorhoz egy négyesvektort kell rendeljen, $T^{ab}k_b = r^a$ formában. (Belátható, hogy a két követelmény ekvivalens.)

A négyestenzorok komponenseinek GALILEI-transzformációs képletét megkaphatjuk a kovektoroknál használt (18) eljárással. Akár úgy, hogy $T^{ab}k_a l_b$ invarianciája, $(T^{ab}k_a l_b)' = T^{ab}k_a l_b$ a követelmény — tetszőleges k_a, l_b négyes kovektorokra —, akár úgy, hogy $T^{ab}k_b$ négyesvektorként való transzformálódását írjuk elő, tetszőleges k_b négyes kovektorra. A kissé hosszadalmas, de automatikusan végrehajtható számolást mellőzve, az eredmény:

$$\begin{aligned} &T^{00\prime} = T^{00}, \qquad T^{i0\prime} = T^{i0} - V^i T^{00}, \qquad T^{0j\prime} = T^{0j} - V^j T^{00}, \\ &T^{ij\prime} = T^{ij} - V^i T^{0j} - V^j T^{i0} + V^i V^j T^{00}. \end{aligned} \tag{22}$$

A fizikában ismert nevezetesebb négyestenzorok egyike a tömegpontok $r^a(mv^b) - r^b(mv^a)$ négyes perdület[19] mennyisége. Ennek tér-térszerű része (a tenzorok részeinek elnevezését lásd később) a megszokott hármas perdület, megfordítva pedig: a hármas perdület GALILEI-konzisztens négyes kiterjesztése ez a négyestenzor. A másik nevezetes négyestenzor az elektrodinamika **D** elektromos gerjesztéseből és **H** mágneses gerjesztéséből[20] GALILEI-konzisztensen megalkotható $\boldsymbol{\mathcal{G}}$ négyestenzor. Erre a mennyiségre az ezután sorra kerülő négyes kotenzorok kapcsán hamarosan visszatérünk.

Következzenek a sorban tehát most a négyes kotenzorok. Bilineáris mennyiségként ezek két négyesvektorhoz rendelnek GALILEI-skalárt, $C_{ab}r^a s^b$ módon. Lineáris mennyiségként pedig egy négyesvektort egy négyes kovektorba képeznek, $C_{ab}r^b = k_a$ formában.

A kotenzor (avagy ko-kovariáns típusú tenzor) komponenseinek GALILEI-transzformálódása szintén az előzőekhez hasonlóan határozható meg. Ismét csak az eredményt közölve:

$$\begin{aligned} C_{00}{}' &= C_{00} + V^i C_{i0} + V^j C_{0j} + V^i V^j C_{ij} = \\ &= C_{00} + V^i\,(C_{i0} + C_{0i}) + V^i V^j C_{ij}, \\ C_{i0}{}' &= C_{i0} + V^j C_{ij}, \qquad C_{0j}{}' = C_{0j} + V^i C_{ij}, \qquad C_{ij}{}' = C_{ij}. \end{aligned} \tag{23}$$

Mint a fizikából ismert nevezetes példa, az $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ elektrodinamikai térerősségtenzor említhető meg, mely az **E** elektromos térerősségből és a **B** mágneses térerősségből[21] alkotható GALILEI-konzisztens mennyiség. Belátható, hogy az $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ négyes kotenzor és

[19] kétszer olyan hosszú, nehézkesebb, sokkal kevésbé kifejező és nehezebben megjegyezhető nevén: impulzusmomentum

[20] történeti, mai megértésünk szintjén már meghaladott nevükön: elektromos eltolás és mágneses térerősség

[21] történeti, mára meghaladott nevén: mágneses indukció

a $\mathcal{G}$ négyestenzor révén az elektrodinamika MAXWELL-egyenletei, és a ponttöltésre ható LORENTZ-féle erőtövény egyaránt megfogalmazhatóak GALILEI-konzisztens módon. Inkonzisztencia csak a $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$, $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu}\mathbf{B}$ ún. anyagi egyenletek kapcsán lép föl: ezeket az anyagi egyenleteket nem lehet GALILEI-konzisztens módon kiróni, hiszen $\mathcal{F}$ és $\mathcal{G}$ nem azonos típusú négyestenzorok. Csak egyetlen kiválasztott inerciarendszerben lehet kiróni, és akkor ez az inerciarendszer az elektrodinamikai jelenségkör szempontjából egy kitüntetett vonatkoztatási rendszer lenne.[22] Ez a kitüntetett inerciarendszer az éter, vagy annak legalábbis egy minimális, de elkerülhetetlen formája (nem baj, ha nincs köze az elektromágneses hatások továbbításához, mint azt történetileg az éterről, mint egy bizonyos közegről gondolták, de legalábbis egy kitüntetett inerciarendszerre szükség van). Mint azt tudjuk, a GALILEI-féle relativitási elv eme sérülését kísérletileg nem sikerült kimutatni. Ezért úgymond az a feladat adódott az elméleti fizika számára, hogy a GALILEI-transzformáció helyett keressen egy olyan másikat, amely szintén kifejezi az inerciarendszerek egyenértékűségét, viszont lehetővé tesz egy természetes, kitüntetett megfeleltetést négyestenzor és négyes kotenzor között. A LORENTZ-transzformáció ilyennek adódott, ugyanis az általa invariánsan hagyott négyes pszeudoeuklideszi szerkezet természetes azonosítást nyújt négyesvektor és négyes kovektor között, és következésképp a négyfajta tenzor mindegyike között is.[23]

Térjünk most át a két hátralevő, úgynevezett vegyes tenzor típusának ismertetésére. Ezek egyike az $L^a{}_b r^b = s^a$ módon négyesvektort négyesvektorba képező lineáris leképezés, avagy az egy kovektorhoz és egy vektorhoz $L^a{}_b k_a r^b$ módon skalárt rendelő bilineáris leképezés. Az ilyen kontra-kovariáns tenzorkomponensek GALILEI-transzformálódási szabálya (a levezetést ismét nem közölve)

$$\begin{aligned} &{L^0{}_0}' = L^0{}_0 + V^j L^0{}_j, \qquad {L^0{}_j}' = L^0{}_j, \qquad {L^i{}_j}' = L^i{}_j - V^i L^0{}_j, \\ &{L^i{}_0}' = L^i{}_0 - V^i L^0{}_0 + V^j L^i{}_j - V^i V^j L^0{}_j\,. \end{aligned} \tag{24}$$

A másik vegyes tenzortípus pedig a négyes kovektorokat négyes kovektorokba képező lineáris, avagy egy vektort és egy kovektort skalárba képező bilieáris leképezések, $N_a{}^b k_b = l_a$, illetve $N_a{}^b r^a k_b$ módon. Az ilyen ko-kontravariáns tenzorkomponensek transzformációs szabálya pedig a következőnek bizonyul:

$$\begin{aligned} &{N_0{}^0}' = N_0{}^0 + V^i N_i{}^0, \qquad {N_i{}^0}' = N_i{}^0, \qquad {N_i{}^j}' = N_i{}^j - V^j N_i{}^0, \\ &{N_0{}^j}' = N_0{}^j + V^i N_i{}^j - V^j N_0{}^0 - V^i V^j N_i{}^0. \end{aligned} \tag{25}$$

A két vegyes típusú tenzorra nehezebb közismert fizikai példát mutatni.

A négyestenzor-komponensek mindegyikét reprezentálhatjuk mátrix formában. A mátrixalak azonban nem fogja jelezni, hogy a szóbanforgó tenzor a négy típus melyikéhez tartozik. Az a konvenció, hogy a kovektorokat sormátrix, a vektorokat

[22] Amikor jelen van egy folytonos, elektromágnesesen aktív közeg, akkor természetes és jogos az e közeghez rögzített, fizikailag kitüntetett vonatkoztatási rendszerben róni ki. Vákuumban azonban nincs jelen elektromágnesesen kitüntetett vonatkoztatási rendszer, tehát bajban vagyunk.

[23] Természetesen a fizika tudománytörténetileg nem így élte meg ezeket a történteket, ez már csak a kellő távolságból rálátni tudó utókor elemzése.

oszlopmátrix alakban reprezentáltuk, a tenzorokra már nem terjeszthető ki. Egy másik érvágás pedig az, hogy ha a tenzorok vektorokra való hatását mátrixszorzásokkal szeretnénk reprezentálni, akkor már azt sem tudjuk tartani, hogy a kovektorok sormátrixként legyenek megjelenítve, a vektorok pedig oszlopmátrixként. (Gondolkodjunk el például a $T^{ab}k_a l_b$ kombináció mátrixszorzatként való reprezentálásán.) Lehetséges olyan konvenciót kialakítani, amellyel a mátrixszorzással való reprezentálás fenntartható, és a mátrixok mögötti négyféle tenzorfajta típusa is kiderül, erre a technikai részletre azonban ez a bevezető írás nem tér ki. Mindenesetre, függetlenül attól, hogy használhatjuk-e a mátrixszorzást a lineáris műveletek reprezentálására, célszerű mindegyik tenzortípust egyformán úgy reprezentálni mátrixalakban, hogy első indexe a sorindex, második indexe az oszlopindex. Például tehát,

$$\{T^{ab}\} = \begin{pmatrix} T^{00} & T^{0j} \\ T^{i0} & T^{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^{00} & T^{01} & T^{02} & T^{03} \\ T^{10} & T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ T^{20} & T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ T^{30} & T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Mivel a mátrix-reprezentáció nem tesz különbséget a négyfajta tenzor között, ezért további csapdákat is rejt azok számára, akik hozzászoktak az euklideszi környezethez, ahol a vektor és kovektor közötti különbséggel nem kellett törődni. Az egyik ilyen az, hogy a transzponálás általánosan azt csinálja, hogy a tenzor mint bilineáris leképezés két változóját felcseréli. Namármost, egy vegyes tenzor esetén ez azt jelenti, hogy a tenzor típusa is felcserélődik, egy ko-kontra-tenzorból kontra-kotenzort csinál, és fordítva: ${L^a}_b \mapsto {(L^T)_b}^a$, és ${N_a}^b \mapsto {(N^T)^b}_a$ (ahol ^{T} a transzponálást jelöli). Ezért a vegyes tenzoroknak nincs Galilei-konzisztens szimmetrikus és antiszimmetrikus része. Egy adott inerciarendszerben a mátrixnak persze képezhetők lennének ezek a hagyományos mátrix-értelemben, de az eredmények a négy Galilei-konzisztens tenzorfajta egyikébe se tartoznának. Másképp megfogalmazva, tulajdonképpen arról van itt szó, hogy egy kétváltozós, első változójában kovektorra, a másodikban vektorra ható függvény nem adható össze egy első változójában vektorra, a másodikban kovektorra ható függvénnyel.

Egy másik hasonló buktató az, hogy nyoma (spurja, trace-e) viszont csak a két vegyes tenzorfajtának van (Galilei-konzisztens módon): ${L^a}_a$ illetve ${N_a}^a$; a tenzoroknak és a kotenzoroknak nincs. Egy adott inerciarendszerben, mint mátrixnak ugyan képezhető lenne, de az eredmény nem lenne Galilei-skalár.

Zárjuk ezt a szakaszt azzal a megjegyzéssel, hogy a magasabbrendű, „három- és többindexes” tenzorok transzformációs szabályai egyre bonyolultabbak, viszont a fenti képletekben megfigyelhető mintázatok alapján levezetés nélkül is kikövetkeztethetőek.

6. A téridő szerkezete

Elhangzott már többször, hogy a nemrelativisztikus téridő vektorain nem egy euklideszi, vagy akár pszeudo-euklideszi szerkezet van, hanem bizonyos más szerkezetek. Ismerkedjünk most meg végre ezekkel közelről. Vegyük magunk elé e célból a négyesvektorok és a négyes kovektorok korábban már megismert Galilei-transzformációs képleteit:

$$r^{0\,\prime} = r^0, \qquad r^{i\,\prime} = r^i - V^i r^0 \quad \text{azaz} \quad \mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{V} r^0; \tag{27}$$

$$k_0{}' = k_0 + V^i k_i = k_0 + \mathbf{V}\mathbf{k}\,, \qquad k_i{}' = k_i \quad \text{azaz} \quad \mathbf{k}' = \mathbf{k}\,. \tag{28}$$

A négyesvektorok nulladik komponense, melyet a négyesvektor időszerű részének nevezünk, invariáns (az idő abszolút). Ezért bevezethető a mátrixalakban

$$\{\tau_a\} := \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{29}$$

módon megadható τ_a kovektor. Hogy valóban kovektort vezettünk be, az a kovektorok (28) transzformációs képletéből rögtön ellenőrizhető: τ_a alakja minden inerciarendszerben ugyanaz, tehát definíciója nem függött az inerciarendszertől, amelyben a (29) alakkal definiáltuk. τ_a hatása egy négyesvektorra

$$\tau_a r^a = r^0, \tag{30}$$

vagyis τ_a a négyesvektorok abszolút időszerű részét olvassa le. Ezért időkiértékelésnek (pontosabb szóhasználattal: időtartam-kiértékelésnek) nevezhetjük.

A négyesvektorok ún. térszerű része, azaz az $\mathbf{r}$ hármas része viszont nem abszolút. Kivételt képeznek a

$$\tau_a q^a = 0 \tag{31}$$

tulajdonságú, tehát $\begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{q} \end{pmatrix}$ alakú téridővektorok, amelyek térszerű része Galilei-invariánsnak bizonyul. Az ilyen alakú négyesvektorokat térszerű négyesvektoroknak nevezzük (hiszen időszerű részük nincs). A térszerűség fogalma abszolút. Ügyeljünk arra, hogy az időszerűség fogalma viszont nem: ha egy négyesvektornak csak az időszerű része nemnulla, akkor egy másik inerciarendszerre áttérve már nemnulla lesz a térszerű része is.

A térszerű vektorok invariánsak, ezért a hármas skalárszorzatuk, a $\begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{q} \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 0 \\ \hat{\mathbf{q}} \end{pmatrix}$ négyesvektorok

$$\mathbf{q}\hat{\mathbf{q}} = q^i \hat{q}^i \tag{32}$$

kombinációja is invariáns. A négyesvektorok két abszolút szerkezetének pontosan ez a két most megismert leképezést találjuk: az időkiértékelést és a térszerű vektorok háromdimenziós euklideszi szerkezetét.[24]

Nézzünk most rá a 4. szakaszban megismert $\begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}$ négyessebesség-vektorra. Ennek időkiértékeltje 1, tehát a négyessebességek nem térszerű vektorok. Ráadásul nem is alkotnak vektorteret: az összeadás is és a számmal szorzás is kivezet közülük (az általános négyesvektorok halmazába): mindkettő elrontja az időszerű komponens 1 voltát. A négyessebességek ún. affin teret alkotnak: ők maguk nem alkotnak

[24] Mármint a vektortér-tulajdonságokon, a vektorok összegén és számszorosán felül.

vektorteret, de különbségeik igen. Mi több, különbségeik időszerű része nulla, így a különbségeik térszerű vektorok. A négyessebességek halmaza tehát egy háromdimenziós euklideszi affin teret alkot (ui. alulfekvő vektorterük, azaz különbségeik halmaza a térszerű vektorok háromdimenziós euklideszi vektortere).[25]

A szintén a 4. szakaszban megismert $\binom{0}{\mathbf{a}}$ négyesgyorsulás-vektorról már rutinosan állapíthatjuk meg, hogy térszerű vektor. Ugyanígy térszerű vektor a $\binom{0}{\mathbf{F}}$ négyeserő vektor is.

Most elővehetjük a Newtonnak gondot okozó tömegvonzási erőtörvény kérdését. Ha egy m tömegű tömegpont a $\binom{t}{\mathbf{r}}$-el kijelölt téridőpontban, egy M tömegű pedig a $\binom{t}{\mathbf{R}}$-vel kijelölt téridőpontban jár, akkor utóbbi az előbbire pillanatszerűen, tehát egyidejű módon hat a

$$\mathbf{F} = -\gamma \frac{Mm}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{R}) \tag{33}$$

hármas, azaz

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{F} \end{pmatrix} = -\gamma \frac{Mm}{\left| \binom{t}{\mathbf{r}} - \binom{t}{\mathbf{R}} \right|^3} \left[\begin{pmatrix} t \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t \\ \mathbf{R} \end{pmatrix} \right] \tag{34}$$

négyes erővel, ahol $|\ \ |$ a térszerű vektorok euklideszi hosszát jelöli, γ pedig a gravitációs állandó. Láthatjuk tehát, hogy a pillanatszerű távolhatáshoz nincs szükség egy abszolút térhez, csak egy olyan téridőhöz, melyen van abszolút egyidejűség, és (a távolságfüggéshez) az egyidejű téridőpontokat összekötő téridővektorokon egy euklideszi szerkezet.

Ezzel a nemrelativisztikus téridő alapvető ismertetése befejeződött. Az alább következő két szakasz bizonyos további, technikaibb jellegű ismereteket foglal össze. Az e részletek iránt most nem érdeklődő Olvasó nyugodtan eltekinthet átolvasásuktól, és áttérhet az Utószóra.

7. A négyes mennyiségek fő jellegzetességei

A nemrelativisztikus téridő időkiértékelése és térszerű euklideszi szerkezete a négyesvektorok alaptulajdonságait fejezik ki. A négyes kovektorok, négyestenzorok és magasabb mennyiségek alapvető jellemzői a négyesvektorok tulajdonságaiból következnek, azokból származtathatóak.

[25] Ez az írás az egyszerűség kedvéért a négyes téridővektorokat és a négyessebességeket egy kalap alá veszi, és ugyanúgy a térszerű téridővektorokat a négyessebességek különbségeinek vektorterével, pedig mindkét esetben fizikailag különböző dimenziójú mennyiségekről van szó. A fizikai dimenziók (a mértékegységek témaköre), és a négyesvektorok (-tenzorok, stb.) fizikai dimenziójának nyilvántartása Matolcsi könyvében [7] van tisztességesen ismertetve. Jelen írás ebből a szempontból is leegyszerűsítő, de megnyugtatásul elmondható, hogy mindaddig, amíg különböző dimenziójú négyesvektorokat nem akarunk összeadni, nem követünk el hibát. Különböző dimenziójú térszerű négyesvektorok skalárszorzatát például szabad venni — természetesen annak tudatában, hogy az eredmény annak megfelelő dimenziójú lesz.

A négyes kovektorokra e módon öröklődő speciális szerkezet az a lineáris leképezés, mely egy kovektorhoz hozzárendeli a róla leolvasható, Galilei-invariáns térszerű részét, mely egy térszerű vektorként értelmezhető. A négyes kovektorok térszerű része [mely alatt a $\begin{pmatrix} k_0 & \mathbf{k} \end{pmatrix}$ négyes mennyiség $\mathbf{k}$ hármas részét értjük] ugyanis (28) szerint nem transzformálódik inerciarendszer-váltáskor. Ez az invariáns hármas mennyiség négyes szemmel egy térszerű négyesvektor abszolút térszerű részeként fogható föl. Ez a térszerű négyesvektor a négyes kovektorból azzal a σ^{ab} négyestenzorral készíthető el, melyre $\sigma^{a0} = 0\,,\ \ \sigma^{0b} = 0\,,\ \ \sigma^{ij} = \delta^{ij}\,,$[26] vagyis mátrixalakban

$$\left\{\sigma^{ab}\right\} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{35}$$

Hogy valóban négyestenzorról van szó, az (22) alapján ellenőrizhető. A k_a kovektor abszolút térszerű részét tehát $\sigma^{ab}k_b$ alakban olvashatjuk le, az eredmény térszerű négyesvektorként van értelmezve [azaz nem mint $\mathbf{k}$, hanem mint a négyes szemszöghöz és kívánalmakhoz igazított $\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{k} \end{pmatrix}$]. [27]

A négyes kovektorokra mint négyesvektorokon ható lineáris leképezésekre, azaz függvényekre gondolva, σ^{ab} valójában nem más, mint e függvények megszorítása értelmezési tartományuk egy részére: megszorításuk az általános négyesvektorok halmazáról a térszerű négyesvektorok halmazára. E megszorítások tehát a térszerű vektorok kovektoraivá teszi négyes kovektorainkat. A térszerű vektorok kovektorai pedig a hármas euklideszi szerkezet révén azonosítódnak a térszerű vektorokkal. A megszorítás tehát négyes szemmel nézve térszerű négyesvektorokat készít a négyes kovektorokból.

Későbbi felhasználások számára érdemes a $\sigma^{a0} = 0,\ \ \sigma^{0b} = 0$ tulajdonságokat a

$$\tau_a\sigma^{ab} = 0\,, \qquad \tau_b\sigma^{ab} = 0 \tag{36}$$

tulajdonságok formájában is megfogalmazni.

A négyes kovektorok időszerű része ellenben nem abszolút. Kivétel ez alól csak az időszerű négyes kovektoroknál lép föl: azoknál a speciális kovektoroknál, melyek térszerű része nulla [vagyis a $\begin{pmatrix} k_0 & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ alakú kovektoroknál]. Az időszerű kovektorok időszerű része Galilei-invariáns, azaz abszolút, és így az időszerű kovektorok abszolút mennyiségek. Időszerű kovektorra láttunk is az imént egy nevezetes példát: a τ_a időkiértékelést. Mi több, felismerhetjük, hogy az időszerű kovektorok mind τ_a skalárszorosai (k_0-szorosai).

[26] itt δ^{ij} az ún. Kronecker-delta mennyiség, mely $i = j$ esetén 1, $i \neq j$ esetén 0 értéket vesz fel, azaz tulajdonképpen az egységmátrix komponenseit jelöli. Az i, j hármas indexek esetén nincs jelentősége, hogy felső vagy alsó indexként (vektor- vagy kovektor-indexként) vannak-e írva, mert a hármas vektorok és kovektorok a hármas euklideszi szerkezet révén azonosítva vannak (v.ö. 18. lábjegyzet).

[27] Természetesen tekinthetjük az eredményt egyszerűen $\mathbf{k}$-nak is. Csak mivel érdemes elsajátítanunk a négyes szemléletet, és tartanunk a négyes képletek logikáját, ezért ajánlott a vele ekvivalens, és a négyes felfogáshoz illeszkedő $\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{k} \end{pmatrix}$ alakot tekinteni. Ez egy kis absztrakciót jelent, de hát gondoljunk az autóvezető-tanfolyam példájára: busásan meg fog térülni a négyes szemléletmód.

Az az érdekes tény derült ki tehát, hogy egy Galilei-skalár mindig egyben egy Galilei-kovektor is, mármint abban az értelemben, hogy ha f Galilei-skalár, akkor $f\tau_a$ Galilei-kovektor, melynek abszolút időszerű része maga az f skalár. Ha tehát találkozunk egy mennyiséggel, amely Galilei-skalárnak bizonyul, ettől még nemcsak skalárként, hanem egy speciális kovektorként is reprezentálhatjuk. Ilyen határozatlansággal a többi négyes mennyiségek kapcsán is találkozni fogunk: skalár és kotenzor között, vektor és kotenzor között, stb.

Ezeknek a határozatlanságoknak az oka az, hogy a négyes Galilei-mennyiségek transzformációs szabályai a V^i áttérési sebességkomponenseket azok polinomjai formájában tartalmazzák — ld. (22)–(28). Egy mennyiség transzformációs képlete magasabb és alacsonyabb fokú polinomokat is tartalmaz, és olyan speciális esetben, amikor a magasabbfokú polinomok együtthatója nulla, a magasabbrendű mennyiség egy alacsonyabb rendűvel kerülhet ekvivalenciába. Speciális relativisztikusan a transzformációs képletek $\sqrt{1-V^2/c^2}$ hatványait is tartalmazzák, és e gyökös kifejezés hatványkitevőjéből egyértelműen kiderül, hogy skalárról, vektorról vagy hanyadrendű tenzorról van szó. (Kovektor és vektor között ott nincs megkülönböztetés, mert a relativisztikus pszeudoeuklideszi szerkezet azonosítást ad közöttük.)

Memorizálás céljából érdemes megállapítani tehát, hogy négyes kovektorokra a tér- és időszerűség tulajdonságai pont fordítva vannak, mint a négyesvektoroknál: a négyesvektoroknál az időszerű rész abszolút és a térszerű rész nem, abszolút viszont a térszerű vektor fogalma — a kovektoroknál ellenben a térszerű rész abszolút és az időszerű nem, viszont abszolút az időszerű kovektor fogalma. Ez az átellenes helyzet a tenzorokra-kotenzorokra is öröklődik, mint azt hamarosan látni fogjuk.

Áttérve a másodrendű tenzorokfajtákra, a (26)-ban már látott

$$\{T^{ab}\} = \begin{pmatrix} T^{00} & T^{0j} \\ T^{i0} & T^{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^{00} & T^{01} & T^{02} & T^{03} \\ T^{10} & T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ T^{20} & T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ T^{30} & T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{pmatrix} \tag{37}$$

típusú mátrixreprezentációval is szemléltetve, például a T^{ab} tenzor idő-időszerű részének T^{00}-t, tér-időszerű részének a T^{i0} hármast, idő-térszerű részének a T^{0j} hármast, tér-térszerű részének pedig a T^{ij} blokkot nevezzük:

$$\begin{pmatrix} \text{idő-idősz.} & \text{idő-tersz.} \\ \text{tér-idősz.} & \text{tér-térsz.} \end{pmatrix} \tag{38}$$

Konkrétan a T^{ab} tenzorok (a kontra-kontravariáns típus) esetén (22) alapján az derül ki, hogy idő-időszerű részük abszolút. Az idő-időszerű rész a $\tau_a\tau_b T^{ab} = T^{00}$ módon olvasható le abszolút eszközökkel. A három másik rész nem abszolút, és így abszolút eszközökkel nem olvasható le.[28]

Abszolútak viszont a tér-térszerű tenzorok, azaz azok a speciális esetek, amelyeknek idő-időszerű, tér-időszerű, és idő-térszerű részei mind nullák, vagyis

$$\tau_a T^{ab} = 0\,, \qquad \tau_b T^{ab} = 0\,. \tag{39}$$

[28] Leolvasható a választott inerciarendszerünk négyessebességének segítségével, ez a technikai részlet azonban itt nem kerül bemutatásra.

A C_{ab} kotenzoroknál pont fordítva áll a helyzet — ahogy az a vektorok és kovektorok között is történt. A tér-térszerű rész az abszolút, ez a $\sigma^{ca}\sigma^{db}C_{ab}$ módon olvasható le, mely az eredményt tér-térszerű négyestenzorként értelmezi. Ez láthatóan annak a tenzori (kotenzori) megfelelője, ahogyan a kovektorok abszolút térszerű részét olvastuk le.

A $\sigma^{ca}\sigma^{db}C_{ab}$ kombinációra τ_c-t hattatva nullát kapunk [ld. (36)], illetve τ_d-t hattatva rá szintén [ismét (36) révén]. Akkor pedig a (39) szituációval állunk szemben.

A kotenzorok három másik része viszont nem abszolút. Abszolútak ellenben az idő-időszerű kotenzorok, tehát amelyeknek C_{i0}, C_{0j} és C_{ij} részei nullák. Azaz, négyes leképezésekkel kifejezve, amelyekre

$$\sigma^{ca}C_{ab} = 0\,, \qquad \sigma^{cb}C_{ab} = 0\,. \tag{40}$$

Az idő-időszerű kotenzorok skalárként transzformálódnak, tehát ahhoz hasonlóan, hogy az időszerű kovektorok ekvivalensek egy Galilei-skalárral, az idő-időszerű kotenzorok is ilyenek. (És így egyben egy időszerű kovektorral is ekvivalensek.) Továbbá, szintén ahhoz hasonlóan, hogy az időszerű kotenzorok $f\tau_a$ alakúak, az idő-időszerű kotenzorok $f\tau_a\tau_b$ alakúnak bizonyulnak.

Az $L^a{}_b$ vegyes tenzorok esetén a (24) transzformációs képletek használhatók annak megállapítására, hogy ezeknek az idő-térszerű részük, $L^0{}_j$, négyes kifejezésmóddal $\tau_a\sigma^{bc}L^a{}_b$ abszolút. Viszont abszolútak a tér-időszerű [$\tau_a L^a{}_b = 0$ és $\sigma^{bc}L^a{}_b = 0$ tulajdonságú] speciális esetek.

Az $N_a{}^b$ másik fajta vegyes tenzoroknak a (25) transzformációs képletek alapján a $N_i{}^0$ tér-időszerű részük (azaz $\sigma^{ca}\tau_b N_a{}^b$) abszolút. Abszolútak ellenben az idő-térszerűek [$\sigma^{ca}N_a{}^b = 0$, $\tau_b N_a{}^b = 0$].

8. Függvények, deriválás, integrálás

Ebben a szakaszban az állítások jó részét már nem fogjuk bizonyítani, csak „bizonygatni” (szemléltetni).

A csak időtől függő függvények abszolútak (mert az idő abszolút) — de persze csak ha függvényértékeik valamelyik szabványos négyes mennyiségtípusba tartoznak (négyes-skalár, négyesvektor, négyes kovektor, stb.). Egy $t \mapsto f(t)$ skalár[29] értékű függvény $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f$ deriváltja abszolút, és egy skalár értékű függvény lesz. Egy $t \mapsto s^a(t)$ négyesvektor értékű függvény deriváltja négyesvektor értékű függvény lesz; és így tovább.

A csak térváltozótól függő függvények nem abszolútak: $\mathbf{r}$ változójuk egy $\mathcal{K} \to \mathcal{K}'$ inerciarendszer-váltásra $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{V}t'$ miatt $\mathcal{K}'$-szemmel időfüggést is tartalmaz. Nincs tehát abszolút értelme például helyfüggő erőmezőnek, potenciálnak és ilyeneknek: ezek csak egyetlen bizonyos inerciarendszer szerint nézve lehetnek tisztán helyfüggőek.

A téridőfüggő függvények (más ismert neveiken: mezők, lokális mezők) abszolú-

[29] mármint négyes-skalár, Galilei-skalár

tak — de természetesen szintén csak akkor, ha függvényértékeik valamelyik GALILEI-szabványos mennyiségtípusba tartoznak. Egy f skalár értékű függvény négyes deriváltja a $\partial_a f$ négyes kovektor értékű függvény. (A négyes deriváltat nevezhetnénk négyes gradiensnek is, de ez részben félrevezető, hiszen nulladik komponense idő-derivált jellegű, a gradiens szó pedig térderivált jelentést szokott felidézni.)

A $\sigma^{ba}\partial_a f$ kombináció mátrixalakban

$$\{\sigma^{ba}\partial_a f\} = \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_i f \end{pmatrix} \tag{41}$$

alakú, azaz ez a kombináció egy abszolút térszerű négyesvektor értékű függvény.

Ez négyes számítással a (31) tulajdonság, $\tau_b\sigma^{ba}\partial_a f = 0$ ellenőrzésével mutatható meg, mely (36) miatt valóban teljesül.

Ezért egy skalármező hármas formalizmusban megszokott térderiváltja, azaz hármas gradiense négyes szemmel is egy abszolút mennyiség. Hasonlóan mutatható meg, hogy minden más négyes mennyiség (értékű függvény) számára is abszolút a hármas gradiens, mégpedig egy térszerű négyesvektorként jelentkezik.

A ∂_0 idő szerinti parciális derivált ellenben nem abszolút! Ez első pillantásra meglepőnek tűnhet, hiszen az idő abszolút, és a csak időtől függvő függvények idő-deriváltja is abszolút. Azonban téridőfüggő függvények esetén $\partial_0 f$ ugyebár $\partial_0 f|_{\mathbf{r}}$-et jelent, azaz állandó $\mathbf{r}$ mellett vett deriváltat, és $\mathbf{r}$ nem abszolút. Ami az egyik inerciarendszernek egy állandó $\mathbf{r}$ (egy állandó térpont), az egy másiknak egy időfüggő valami (egy folyamat), nem abszolút tehát az „állandó hely mellett vett derivált”.

Egy s^a négyesvektor értékű téridő-függvény négyes deriváltja $\partial_b s^a$, a fordított indexsorrend azt tükrözi, hogy lineáris leképezésként szemlélve a deriváltat, igazából a $s^a\overleftarrow{\partial}_b$, azaz $s^a \circ \overleftarrow{\partial}_b$ sorrend adódik, ahol $\circ$ a diadikus vagy tenzorszorzat jele, a felső balranyíllal pedig azt jelöltük, hogy a deriválás a tőle balra eső függvényre hat.[30]

Mint azt az imént említettük, egy — téridőn értelmezett — q^a térszerű négyesvektor értékű függvény hármas gradiense [a $\sigma^{cb}\partial_b q^a$ négyes értelemben] négyesen abszolút, és a deriváláshoz kötődő (c) indexében térszerű. q^a térszerű volta révén pedig a másik (a) indexében is térszerű, tehát egy tér-térszerű négyestenzormező. Mátrixalakban

$$\left\{\sigma^{cb}\left(q^a\overleftarrow{\partial}_b\right)\right\} = \{\sigma^{cb}\partial_b q^a\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \partial_j q^i \end{pmatrix}. \tag{42}$$

Térszerű vektormezőkre tehát a megszokott hármas térderivált négyes szemmel abszolút mennyiség. Ezért a hármas divergencia és a rotáció is az. Hangsúlyozandó azonban, hogy ez csak térszerű négyesvektor esetén teljesül — ha találkozunk egy hagyományos hármasvektor értékű mezővel, nem feltétlenül lesz a térderiváltja (és divergenciája, rotációja) abszolút: transzformációs tulajdonságát megvizsgálva ellenőriznünk kell, hogy e hármas mennyiség négyes szempontból térszerű négyesvektor-e.

[30] Itt annak a levét isszuk, hogy matematikában kialakult hagyományos konvenció egy függvény deriválásának jelét a függvény bal oldalára írja, pedig a deriválás tartalmi lényegét a függvény jobb oldalára írás ábrázolná jobban.

Egy kontinuum áramlását leíró $\mathbf{v}$ sebességmező esetén speciális szerencsénk van. A hármassebesség négyes megfelelője ugyanis a (8) négyesvektor, mely nem térszerű. Olyan speciális négyesvektor azonban, hogy két ilyen különbsége már térszerű négyesvektor.[31] A deriválás pedig definíció szerint a különbségekkel kapcsolatos. Ennek a szerencsének a folytán a négyessebességmező térderiváltja (és így divergenciája, rotációja) abszolútnak bizonyul.

Ha van egy sebességmezőnk, akkor értelmezhető egy tetszőleges mezőnek e sebességmező szerint vett szubsztanciális deriváltja. Egy f skalármezőre ez $v^a\partial_a f$, más tenzori mennyiségekre pedig az ennek megfelelő kombináció. A szubsztanciális derivált abszolút (egy négyes kovektornak mint lineáris leképezésnek egy négyesvektorra vett hatásáról van itt szó).

Pár szót ejtve végül az integrálásról: a pusztán időfüggő skalárfüggvények idő szerinti integrálja abszolút. A téridőn értelmezett skalárfüggvények téridő-integrálja szintén abszolút. Ez utóbbi a GALILEI-invariánsnak bizonyuló $\mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \mathrm{d}r^0\mathrm{d}r^1\mathrm{d}r^2\mathrm{d}r^3$ négyes térfogatelem (téridőfogat-elem) — precízebben fogalmazva: a téridőn természetes módon bevezethető integrálási mérték — miatt van így.

A téridőn értelmezett skalárfüggvények (skalármezők) egy adott időpillanatban vett térintegrálja is abszolút, a $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \mathrm{d}r^1\mathrm{d}r^2\mathrm{d}r^3$ hármas térfogatelem (jobban mondva: a megfelelő integrálási mérték) GALILEI-invarianciája miatt.

Ha skalármező helyett négyesvektor, négyes kovektor, négyestenzor stb. értékű mezőt tekintünk, akkor azok téridő-, illetve adott időpontbeli térintegrálját a típusuknak megfelelő transzformációval kell inerciarendszer-váltáskor átváltani.

9. Utószó

A nemrelativisztikus téridőnek számos további fizikailag fontos aspektusa van, amelyek ismertetésére itt nem került sor. Ezek közül talán a legfontosabb a vonatkoztatási rendszerek (más elnevezésekkel: megfigyelők, megfigyelő-mezők) tárgyalása: inerciális, egyenletesen gyorsuló, egyenletesen forgó, merevtestszerű/távolságtartó, és általános (amilyen az — általában deformálódó — kontinuumáramlásokhoz rendelhető hozzá). E további témák áttekintése azonban már meghaladja ennek az írásnak a kereteit. Az érdeklődő Olvasó MATOLCSI [7] könyvében találja meg ezek bemutatását — bár nem az itt alkalmazott, hanem a vonatkoztatásirendszer-mentes leírásban. Ugyanott lehet utánanézni minden olyan aspektusnak is, amely az itt nyújtott tárgyalásmódból nem derült ki elegendően világosan.

Köszönetmondás

A szerző köszönetet mond GOHÉR ATTILÁNAK és VÁN PÉTERNEK értékes észrevételeikért és javaslataikért.

[31] Ld. a 27. oldalon elmondottakat is.

Irodalom

[1] Arnold, V.I. (1974): Matyematyícseszkije metódü klasszícseszkoj mehányiki, *Nauka*, Moszkva (oroszul).
Magyar fordítás: A mechanika matematikai módszerei, *Műszaki Könyvkiadó*, Budapest, 1985.

[2] Fülöp, T. (2008): Kontinuumok kinematikájának új értelmezése, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika 2008 ISRM Konferencia. In: Fülöp, T. (szerk.), Új eredmények a kontinuumfizikában, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár **8**, *Műegyetemi Kiadó*, Budapest. (Jelen kötetben.)

[3] Galilei, G. (1632): Dialogo, *Gio. Battista Londini*, Firenze (olaszul).
Magyar fordítás: Párbeszédek, *Kriterion Könyvkiadó*, Bukarest, 1983; pp151–153.

[4] Jaglom, I.M. (1969): Princip atnaszítyelosztyi Galileja i neevklídava geometrija, *Nauka*, Moszkva (oroszul).
Magyar fordítás: Galilei relativitási elve és egy nemeuklideszi geometria, *Gondolat Könyvkiadó*, Budapest, 1985.

[5] Matolcsi, T. (1984): A concept of mathematical physics. Models for spacetime, *Akadémiai Kiadó*, Budapest.

[6] Matolcsi, T. (1985): On material frame-indifference, *Archive of Rational Mechanics and Analysis* 91/2, 99–118.

[7] Matolcsi, T. (1993): Spacetime without reference frames, *Akadémiai Kiadó*, Budapest.

[8] Matolcsi, T. – Gruber, T. (1996): Spacetime without reference frames: An application to the kinetic theory. *International Journal of Theoretical Physics* 35(7), 1523–1539.

[9] Matolcsi, T. – Kristóf, J. – Székely, M. (1996): On the momentum distribution of molecules of an ideal gas, *Publications in Applied Analysis* 7, 1–14.

[10] Matolcsi, T. – Gohér, A. (1996): Spacetime without reference frames and its application to the Thomas rotation, *Publications in Applied Analysis* 5, 1–11.

[11] Matolcsi, T. – Rodrigues, W. A. Jr. (1997): The geometry of space-time with superluminal phenomena, *Algebras, Groups and Geometries* 14/1, 1–16.

[12] Matolcsi, T. (1998): Spacetime without reference frames: An application to synchronizations on a rotating disk, *Foundations of Physics* 28/11, 1685–1701.

[13] Matolcsi, T. – Ván, P. (2006): Can material time derivative be objective? *Physics Letters A* 353, 109–112.

[14] Matolcsi, T. – Ván, P. (2007): Absolute time derivatives, *Journal of Mathematical Physics* 48, 053507–19.

[15] Matolcsi, T. – Ván, P. (2008): On the objectivity of time derivatives, *Atti del l'Accademia Peloritana dei Pericolanti, Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali, Suppl. I.* 86, 1–13.

[16] Simonyi, K. (1978): A fizika kultúrtörténete, *Gondolat Kiadó*, Budapest.

[17] Ván, P. (2007): Objektív anyagfüggvények felé a reológiában, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika 2007 ISRM Konferencia. Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár **4**, *Műegyetemi Kiadó*, Budapest.

[18] Ván, P. (2008): Anyagi sokaságok a nemrelativisztikus téridőben, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika 2008 ISRM Konferencia. In: Fülöp, T. (szerk.), Új eredmények a kontinuumfizikában, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár **8**, *Műegyetemi Kiadó*, Budapest. (Jelen kötetben.)

[19] Weyl, H. (1919): Raum. Zeit. Materie. Vorlesungen über allgemeine Relativitätstheorie, *Springer*, Berlin (németül).
Angol fordítás: Space-time-matter, *Methuen & Co. Ltd.*, London, 1922.