A világ 3, azaz 4, azaz 5, azaz 10, azaz 11, azaz 26, azaz hány dimenziós?

Fülöp Tamás
V. fizikus

1991. március 24.

Bevezető

Kedves Olvasó! Művem azt szeretné bemutatni, hogy milyen eddigi elképzelések születtek a fizikában a téridő dimenziószámával kapcsolatban. A klasszikus mechanika tér- és időfogalmát az azt követő újabb fizikai modellek fokozatosan módosították, a mai legmodernebb („legvadabb") elméletek pedig már nemcsak szerkezetére, hanem dimenziószámára is meghökkentően új elgondolásokat tartalmaznak. Ennek az útnak az állomásait kívánom ismertetni. Mint az ki fog derülni, a történetnek még messze nincs vége! (Talán csak most kezdődik igazán.)

Igyekeztem olvasmányos lenni, célom lehetőleg nem véres szakcikk, hanem szelíd ismertető írása volt. Hogy ez mennyire sikerült, azt döntsd el Te, Kedves Olvasó. Mindenesetre bármiféle észrevétel, vélemény vagy kérdés esetén fordulj hozzám bizalommal, szívesen állok rendelkezésedre.

A Mű végén soroltam fel az általam használt irodalmat, melyben a témában alaposabban elmélyedni kívánó bőséges további információt lelhet.

Végezetül szeretnék köszönetet mondani Palla Lászlónak, aki igen sok értékes segítséget nyújtott Művem megírásához, és mindazoknak, akik a kéziratot átolvasván hasznos észrevételeikkel, tanácsaikkal támogatták a minél kiforrottabb megjelenést.

1991. március 24. Fülöp Tamás, V. fizikus, B 121

A világ 3, pontosabban 4 dimenziós, és sík

A XIX. század végének fizikája szerint a jelenségek egy abszolút térben és egy abszolút időben (mint egyfajta keretben) játszódnak le. A tér egy 3 dimenziós, az idő pedig egy 1 dimenziós euklideszi térként van elképzelve. A fizika törvényei alapvetően a térben nyugvó vonatkoztatási rendszerekben leírt jelenségekre vonatkoznak. Az elektromágneses hullámok például egy a térhez rögzített éter nevű közegben terjednek. A mechanika esetében azonban az egyenes vonalú egyenletes mozgást végző megfigyelők is egyenértékűnek bizonyulnak a jelenségek leírásánál: a mechanika törvényei ezekben a vonatkozási rendszerekben is érvényesek. (Ezek a tehetetlenségi vagy inerciarendszerek, nevüket onnan kapták, hogy bennük a magára hagyott testek tehetetlenül egyenes vonalú egyenletes mozgást végeznek.) Két, egymáshoz képest általában mozgó inerciarendszer egy eseményhez általában különböző tér- és időkoordinátákat rendel, az áttérés képlete a Galilei-transzformáció.

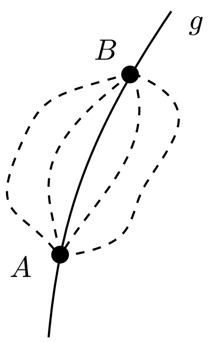
Ez a kép sajnos nem egyezett a tapasztalattal: a század végére összegyűlt néhány kísérleti eredmény, melyek magyarázata újfajta elméletet, ennek részeként új tér- és időfogalmat igényelt. Így született meg a speciális relativisztikus (más néven Minkowski-) téridő. Ez 4 dimenziós, és bármely inerciarendszer számára egy 3 dimenziós térre és egy 1 dimenziós időre hasad szét. Különböző inerciarendszereknél máshogy és máshogy történik ez a széthasadás: ha egy eseményhez két rendszer tér- és időkoordinátákat rendel, az egyikről a másikra való áttérés pl. az új időkoordinátákba belekeveri a régi térkoordinátákat is. (Azaz itt nincs semmiféle abszolút tér és abszolút idő.) Az áttérés képlete pedig a Lorentz- (az eltolásokat és forgatásokat is belevéve a Poincaré-) transzformáció.

Így hát a XX. század elejére két téridő-modell kristályosodott ki a fizikai törvényekből; a tapasztalat a Minkowski-félét mutatta a valósághoz közelebb állónak. A később ismertetendő téridő elképzelésekkel való összevetés szempontjából a két modell következő közös tulajdonságait érdemes kiemelni:

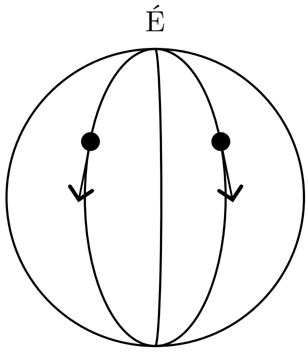
- „sík” (azaz euklideszi geometriával jellemezhető) téridő,
- 3 „térszerű” és egy „időszerű” dimenzió,
- minden „irányban” végtelen kiterjedés.

A világ 4 dimenziós, és görbült

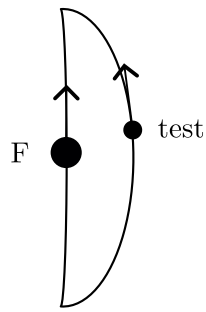
Einstein, aki olyan fizikát tűzött ki célul, amelyben a nem inerciarendszerek is egyenértékűek az inerciarendszerekkel, és észrevéve, hogy a gravitációs mezőben eső testek gyorsulása adott helyen ugyanakkora minden testre, 1915-re egy új, geometriai képen alapuló modellt dolgozott ki a gravitációra. Ehhez egy újfajta, általánosabb téridő-modell tartozott. Ez a téridő már nem feltétlenül sík, hanem általában görbült, adott téridőpontban a téridő görbültségét az épp ott tartózkodó anyag tömegsűrűsége határozza meg. A geometriát – így a görbültséget is – leíró metrikus tenzor és az anyagsűrűség közti összefüggést Einstein-egyenletnek nevezzük. A testek ennek a görbült téridőnek az „egyenesein" mozognak, azaz a lehetséges világvonalak a téridő „egyenesei" (ún. geodetikusai). (Egy görbült téren geodetikusnak nevezünk egy g görbét, ha bármely két A és B pontját a legrövidebb úton összekötő vonal éppen a g görbe A és B közötti része – lásd az 1. ábrát.) Ha a földgömb északi pólusából elindítunk két hangyát két különböző hosszúsági körön (azaz a gömbfelszín két geodetikusán), akkor azok a déli sarkon találkoznak, mindenféle szemmel látható vonzás nélkül, pusztán a felület geometriája alapján (2. ábra). Ugyanígy pl. a Föld, tömegénél fogva környezetében adott mértékben „meggörbíti" a téridőt, így a róla eldobott test a görbe téridő egy geodetikusán mozogva egyszer csak ismét összetalálkozik a Földdel (3. ábra).



1. ábra



2. ábra



3. ábra

Vegyük sorra ennek az új téridő-modellnek a legfőbb tulajdonságait! 4 dimenziós, ezek közül továbbra is 3 „térszerű" és egy „időszerű", de a téridő már nem sík. Már csak annyit követelünk meg tőle, hogy bármely pontja egy környezetében hasonlítson egy Minkowski-téridő egy darabkájához. Még egy fontos eltérés van: az anyag tömegeloszlása függvényében a kapott téridő bizonyos irányokba (vagy akár az összes irányba: tér- és időirányokba egyaránt) véges kiterjedésű is lehet. Például az Univerzumunk téridejére vonatkozó mostani általános relativisztikus modell aszerint véges vagy végtelen kiterjedésű, hogy a benne lényegében egyenletesen eloszló anyag sűrűsége nagyobb-e vagy kisebb egy bizonyos értéknél. Ha véges kiterjedésű (kompakt), akkor persze a mérete igen nagy távolságértékkel lenne jellemezhető, nem is sikerült még kísérletileg eldönteni, hogy Világegyetemünk véges-e vagy sem.

A világ 5 dimenziós?

A speciális relativisztikus fizika megszületése után többen megpróbálkoztak a newtoni gravitációelmélet speciális relativisztikus átfogalmazásával. Ezekben az elméletekben a newtonihoz hasonlóan az alapvető változó a gravitációs potenciál, azaz egy skalármező volt. (Einstein – és vele párhuzamosan Hilbert – a többiektől alapvetően eltérő utat választott: egyrészt általánosabb téridőn dolgozott, másrészt elmélete alapváltozójául tenzormezőt: a téridő metrikus tenzorát választotta.)

A skaláris elméletek egyikét Nordström javasolta 1914-ben. Elgondolása két szempontból is alapvetően újszerű és érdekes volt. Az egyik bátor lépés az volt, hogy Nordström a $3+1$ dimenziós Minkowski-téridőhöz (melyet a továbbiakban M^4 fog jelölni) egy további sík térdimenziót vett föl. A másik pedig az, hogy elméletének alapváltozója egy 5 dimenziós vektormező volt, melynek első négy komponense az elektromágneses négyespotenciál, ötödik komponense pedig a 4 dimenziós téridő szempontjából skalárként viselkedő gravitációs potenciál volt. Azaz ez volt az első próbálkozás a gravitáció és az elektrodinamika egyesítésére, ráadásul 5 dimenziós téridőkeretben!

Az elmélet az ötdimenziós Maxwell-egyenleteket vette alapul, melynek csak olyan megoldásait fogadta el, melyek az 5. koordinátában állandóak, azaz attól függetlenek voltak. Ily módon adta vissza Nordström formalizmusa a szokásos 4 dimenziós fizikát.

Ennek az elméletnek, mint az összes többi skaláris gravitációelméletnek az volt a hiányossága, hogy vagy nem jósolt helyes értéket a Merkur anomális perihéliummozgására – az akkoriban ismert egyetlen, newtoni gravitációval nem megindokolható kísérleti eredményre –, vagy más pontokon nem egyezett a tapasztalattal. Egyedül az Einstein–Hilbert-féle gravitáció felelt meg az összes követelménynek.

1919-ben Kaluza rukkolt elő egy olyan elmélettel, mely már a sikeres gravitációelméletet kívánta az elektrodinamikával egyesíteni. Elgondolásának célja az volt, hogy a gravitációhoz hasonlóan az elektrodinamikának is sikerüljön geometriai értelmezést adni. Kaluza, aki nem ismerte Nordström előbb vázolt próbálkozását, szintén $4+1$ dimenziós téridőt használt formalizmusához. Ismerkedjünk meg kicsit részletesebben ezzel az elképzeléssel, melyet Klein fejlesztett tovább, így a fizikatörténetbe Kaluza–Klein-elmélet néven vonult be.

Képzeljük el, hogy téridőnk $\mathcal{M}^3 \times S^1$ alakú, ahol $\mathcal{M}^4$ egy valamilyen görbült téridő, S^1 pedig egy kör ($\times$ a halmazok Descartes-szorzatát jelöli). Egy ilyen téridő szemléletesen ahhoz hasonlít, mintha elképzelnénk egy síkot, amelynek minden egyes pontjához egy karika érintkezik. S^2 esetén egy teniszlabdákkal megszórt felületet képzelhetünk el, mely messziről ránézve 2 dimenziósnak látszik, és egy teniszlabda felszínének egy P pontját messziről elég a labda érintkezési pontjának 2 síkbeli koordinátájával megadni. Csak P pontos megadásához kell felvenni két újabb koordinátát a teniszlabdák felületén (pl. a szélességi és hosszúsági körök segítségével).

A cél az, hogy az $\mathcal{M}^4 \times S^1$ téridőhöz tartozó ötdimenziós g_{ab} $(a, b = 0, 1, \dots 4)$ metrikus tenzorra felírható einsteini gravitációelméletből egy négydimenziós einsteini gravitációt és egy Maxwell-egyenletrendszert próbáljunk származtatni. Ehhez g_{ab}-ből képezzünk egy $\mathcal{M}^4$ szempontjából négyestenzorként viselkedő $h_{\mu\nu}$, egy négyesvektorként viselkedő A_μ és egy négyes skalár Φ mennyiséget a következő módon:

$$g_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \Phi \cdot A_\mu \cdot A_\nu, \qquad g_{\mu 4} = \Phi \cdot A_\mu, \qquad g_{44} = \Phi, \qquad (\mu, \nu = 0 \dots 3).$$

Mivel az ötödik, S^1-beli kiterjedés véges (jellemezzük őt a $[0, 2nR)$ intervallummal, ahol R az S^1 kör sugara), ezért bármely $\mathcal{M}^4 \times S^1$-en értelmezett függvény, így $h_{\mu\nu}$, A_μ és Φ is Fourier-sorba fejthető az $x_4 \in [0, 2nR)$ változóban. n-edik Fourier-együtthatójukat ($n \in \mathbb{Z}$) jelölje rendre $h_{\mu\nu}^{(n)}$, $A_\mu^{(n)}$, illetve $\Phi^{(n)}$. Ezek a mennyiségek már csak az $\mathcal{M}^4$-et futó változótól függenek.

Az Einstein-egyenlet az ún. Einstein–Hilbert-hatásból származtatható a hatáselv segítségével. Az ötdimenziós g_{ab}-re felírt Einstein–Hilbert-hatást – amely nem más, mint a metrikus tenzorból képezhető ún. skalár görbület téridőre vett integrálja átírva a $h_{\mu\nu}^{(n)}$, $A_\mu^{(n)}$, $\Phi^{(n)}$ mennyiségekre az x_4 változóban kiintegrálhatunk. Ezután Kaluza azt a kényszert írja elő, hogy $h_{\mu\nu}^{(n)} := 0$, $A_\mu^{(n)} := 0$, $\Phi^{(n)} := 0$ minden $n \neq 0$-ra, és $\Phi^{(0)} = 1$. Ekkor a maradék hatásban a szokásos módon levariálva $_{\mu\nu}^{(0)}$-ra a $3+1$ dimenziós Einstein-egyenletet, $A^{(0)}$-ra pedig a Maxwell-egyenleteket kapjuk. Ezáltal $h_{\mu\nu}^{(0)}$-t a $3+1$ dimenziós metrikus tenzorral, $A_\mu^{(0)}$-t pedig az elektrodinamika négyespotenciáljával azonosíthatjuk.

1916-ban Klein vizsgálta meg az $n \neq 0$ Fourier-komponensek (módusok) tulajdonságait, melyből az az érdekesség adódott, hogy az n-edik Fourier-módus $e_n = n \cdot (16\pi\gamma)^{1/2}/R$ nagyságú elektromos töltést és $m_n = |n|/R$ tömeget jelent (itt γ a gravitációs állandó), tehát kvantált elektromos töltések (és tömegek) lépnek fel az elméletben annak ellenére, hogy ez egy tisztán klasszikus elmélet! Ha e_1-et az elektron töltésével azonosítjuk, akkor R a Planck-hossz: $(\hbar\gamma/c^3)^{1/2}$, azaz a $10^{-35}\,\mathrm{m}$ nagyságrendjébe esik, ami érthetővé tenné, hogy miért nem észleljük az extra dimenziót. Az elméletben fellépő tömegek pedig a 0 után egyből a Planck-tömeg $(\hbar c/\gamma)^{1/2}$, azaz a $10^{-8}\,\mathrm{kg} \approx 10^{22}\, m_{\mathrm{elektron}}$ értéknél kezdődnek, ami elég meghökkentő eredmény, ha az $n \neq 0$ módusokat elemi részecskéknek akarnám megfeleltetni.

Még egy szép tulajdonsága van ennek az elméletnek. Az einsteini gravitáció egyenlete kovariánsan transzformálódik az adott téridő bármely koordinátatranszformációjára (ez felel meg annak, hogy bármely vonatkoztatási rendszer – a gyorsulók is – ekvivalens a jelenségek leírása szempontjából). Mostani ötdimenziós elméletünkben az ötdimenziós koordinátatranszformációk játszanak hasonló szerepet. Ezek közül egy bármely, az $\mathcal{M}^4 \times S^1$-et invariánsan hagyó

$$x_\mu \mapsto x_\mu, \qquad x_4 \mapsto x_4 + \alpha(x_0, \dots, x_3)$$

koordinátatranszformációnak (α tetszőleges függvény) az

$$A_\mu^{(0)}(x_0,\ldots,x_3) \mapsto A_\mu^{(0)}(x_0,\ldots,x_3) - \partial_\mu \alpha(x_0,\ldots,x_3)$$

transzformáció felel meg, amiben az elektrodinamikai négyespotenciál egy mértéktranszformációjára ismerhetünk! Azaz itt merült föl először, hogy az elektrodinamikai mértéktranszformációt és az erre való invarianciát geometriai úton származtassák.

Ez volt hát a Kaluza–Klein-elmélet. Akadnak benne önkényes, nem túlságosan indokolható, mesterkélt lépések, de ennél alapvetőbb okok miatt nem használja a ma fizikája: még kvantumos formájában sem tudja leírni a megfigyelt elemi részecskéket, és hiányzik belőle mind a gyenge, mind az erős kölcsönhatás leírása. Mindenesetre a benne rejlő értékes elgondolások: a kölcsönhatások egyesítése, a többlet dimenziós (és abban kompakt) téridő használata, a mértékinvariancia geometriai értelmezése megtermékenyítően hatottak az elméleti fizikára, mint az a továbbiakban felvázolt elméleteknél is kiderül majd.

Minek nekünk 4-nél több dimenzió?

Az extra dimenziós elképzelések csak az 1970-es években kerültek ismét az érdeklődés homlokterébe. Addig a fizika alapvető elméleteit kutató fizikusok a kvantummechanika kiépítésén dolgoztak, majd az elektrodinamika kvantumos elméletét készítették el. Ezután következett a gyenge kölcsönhatás leírása, mely az egyesített elektrogyenge elmélet megalkotásához vezetett. Majd az erős kölcsönhatás elmélete, a kvantumszíndinamika épült ki, és azóta már készültek az elektrogyenge és az erős kölcsönhatást egyesítő elméletek is. Mindezek az elméletek az ún. kvantumtérelméletek családjába tartoznak. Mivel a továbbiakban ismertetendő többlet dimenziós elméletek mind ilyen típusú elméletek lesznek, ismerkedjünk meg egy kicsit a kvantumtérelméletekkel általában!

A kvantumtérelméletek olyan folyamatok leírására is alkalmasak, amelyeket a kvantummechanika nem tud leírni: részecskék keletkezése, eltűnése, átalakulása egyik fajtából a másikba. Így a fizikai állapotok kvantummechanikában szokásos Hilbert-terét a kvantumtérelméletben kibővítjük. Például ilyesféle elemek szerepelnek benne: „egy elektron van a világon, p lendülettel”, „két foton van a világon q_1 és q_2 lendülettel”, „egy elektron és egy foton van a világon p illetve q lendülettel”, „nincs a világon egy részecske sem”, ... A folyamatok (pl. részecskék ütközése) során a $\mathcal{H}$ Hilbert-tér egy ψ_1 eleme (a kezdeti, bemenő állapot) időfejlődéssel átmegy egy ψ_2 elembe (a kimenő állapotba). Az egyes leírandó részecskefajtákhoz egy-egy operátormezőt rendelünk hozzá. (Operátormező: egy téridő minden egyes pontjához egy $\mathcal{H} \to \mathcal{H}$ lineáris operátor van rendelve.) Ezek az operátormezők a szóbanforgó részecske keletkezését illetve eltűnését tudják leírni. A részecskék közt lehetséges kölcsönhatásokat egy Lagrange-sűrűség megadásával jellemezzük. Ez egy további operátormező, mely az egyes részecskefajtákhoz rendelt operátormezők és deriváltjaik szorzatait tartalmazza. A Lagrange-sűrűség téridőre vett integráljával definiált hatásra a hatáselvet alkalmazzuk. Ez a részecskék operátormezőire az Euler–Lagrange-egyenletek teljesülését követeli meg. Az Euler–Lagrange-egyenletek megoldásából adott recept alapján egy $S\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ lineáris operátor (az ún. szórásoperátor) képezhető, amely bármely ψ_1 bemenő állapotra hatva megadja a ϕ_2 kimenő állapotot.

A részecskefizikában nyert tapasztalatok alapján mind az elektrogyenge, mind az erős kölcsönhatás elméletében olyan Lagrange-sűrűség szerepel, mely az egyes részecskefajtákhoz rendelt operátormezők bizonyos fajta kevergetésére invariáns. Ezeket a transzformációkat mértéktranszformációknak nevezzük (ezek egyik legegyszerűbb formája bukkan föl már klasszikus szinten is az elektrodinamikában). A mértéktranszformációk csoportot alkotnak, ezt hívjuk az elmélet mértékcsoportjának. A mértékszimmetriát mutató elméleteket mértékelméleteknek, vagy kifejlesztőikről Yang–Mills-elméleteknek nevezzük. (És még egy szóhasználat: az elméletben szereplő részecskék közül a kölcsönhatást közvetítő részecskékhez rendelt operátormezőket mértékmezőknek is szokás hívni, minthogy ezek igen szorosan kötődnek a mértéktranszformációkhoz). Egy részecskefizika elmélet tehát jellemezhető a benne szereplő alapvető részecskékkel (elektron, neutrinók, kvarkok, ...; ezek mind fermionok), a kölcsönhatást közvetítő részecskékkel (foton, W és Z bozon, gluon; ezek mind bozonok), az esetlegesen fellépő néhány 0 spinű bozonnal (Higgs-részecskék), és végül az elmélet mértékcsoportjával.

Elégedettek lehetünk-e az eddig elkészült elméletekkel? A válasz: nem igazán. Gyűjtsük össze azokat a pontokat, ahol pillanatnyi elméleteink fejlesztésre szorulnak.

A mértéktranszformációkon kívül egy kvantumtérelmélet természetesen invariáns a téridő szimmetriatranszformációira, az elektrogyenge és az erős kölcsönhatás esetén a Minkowski-téridőről és a Poincaré-transzformációkról (eltolás, forgatás, inerciarendszerváltás) van szó. Meglepő kísérleti eredmény volt viszont a paritássértés nevű jelenség felfedezése, mely a rá vonatkozó elmélettől azt követeli meg, hogy az ne legyen invariáns a tér- és időtükrözésekre! Egy részecskét jobbkezesnek hívunk, ha spinjének és lendületének skalárszorzata pozitív, és balkezesnek, ha negatív; ezzel a szóhasználattal élve a paritássértés többek között azt a megdöbbentő tényt fejezi ki, hogy a Természetben nincsenek balkezes neutrínók! (Vagy ha vannak, akkor semmilyen módon nem hatnak kölcsön az összes többi részecskével, tehát gyakorlati szempontból mintha nem is léteznének.) Ez az elektrogyenge és az erős elméletnek az egyik furcsasága (a neve: „királis fermionok”), amely a fizikusokat további kutatásra, valami alapvetőbb elmélet keresésére ingerli.

Egy másik nyugtalanító dolog az, hogy több elektrogyenge + erős egyesített elmélet készült – ezek a hozzájuk tartozó mértékcsoportban, valamint a még meg nem figyelt részecskék számában és tulajdonságaiban térnek el egymástól –, és nincs támpont arra, hogy melyik lehetségeset válasszuk (ma még nincsenek olyan kísérleti eredmények, amelyek segítenének a választásban).

A legnagyobb gond pedig az, hogy a gravitációt még nem sikerült egyesíteni a többi kölcsönhatással. Ez azt jelenti, hogy nincs még egységes formalizmus, mely az anyag gravitációs és egyéb kölcsönhatásait egyaránt tárgyalni tudná. Erre (az ún. Nagy Egyesített Elméletre) pedig az igen nagy energiasűrűségeken lejátszódó jelenségek, pl. a korai Univerzum leírásához biztosan szükség van, hiszen ilyenkor a részecskék gravitációs hatása igen jelentős, akár jóval nagyobb is lehet a többi kölcsönhatásból származó hatásoknál.

Ezen feladatok megoldásához újította fel az elméleti fizika az extra dimenziós elméletek koncepcióját a 70-es években.

Akárhány dimenziós egyesített elméletek

Essünk neki olyan Kaluza–Klein-típusú elmélet gyártásának, amelyik nemcsak az elektrodinamikai négyespotenciált (a kvantumtérelméletben ennek a fotonhoz rendelt operátormező felel meg), hanem az erős vagy a gyenge kölcsönhatás közvetítő részecskéihez rendelt négyespotenciálokat (mértékmezőket) is tartalmazza. Ehhez egynél több (d darab) többlet dimenziót kell fölvennünk. (Ezek legyenek térszerűek, mert ha akadna a téridőn 2 időszerű dimenzió, akkor fölvehetők lennének rajta zárt időszerű görbék is, ez pedig – megfontolások alapján – a kauzalitással nem fér össze.) Az elgondolás az lenne, hogy az elektrogyenge és erős mértékszimmetriák a többlet kompakt dimenziókban elvégzett koordinátatranszformációknak felelnének meg. Megkeresve a tapasztalt mértékcsoportoknak megfelelő alkalmas szerkezetű kompakt téridőkiegészítéseket egy problémával találjuk magunkat szemben.

A Minkowski-téridő előáll mint a gravitáció Einstein-egyenletének olyan megoldása, amelyben nincsen anyag. Kevés anyag jelenléte kicsit hullámossá teszi a sík Minkowski-téridőt, egyéb nem történik vele. Ilyesmit várunk el a gravitációt is tartalmazó többlet dimenziós elméletünktől is: az anyagmezőket 0-nak véve (azaz üres tér esetben) $4 + d$ dimenziós téridőnket síknak várnánk. Namost egy $M^4 \times S^1$ téridő tényleg 0 görbületű (ez esetleg kicsit meglepő, de gondoljunk arra, hogy a sík söröscimke torzulás nélkül ráragasztható a sörösüveg oldalára, tehát a henger (kb. $M^1 \times S^1$) görbülete megegyezik a sík (kb. M^2) görbületével, ami 0); viszont a fent említett módon megkeresett alkalmas téridőkiegészítések görbülete már nem 0. Tehát az üres tér is görbült volna, ami nem túl elfogadható.

Az, hogy $4 + d$ dimenziós téridőnkön az alapvető fermionok operátormezőit is elhelyezzük, sajnos nem segít a helyzeten. Viszont segít az, ha néhány mértékmezőt nem a 4 dimenziós metrikus tenzor mellé teszünk be

Kaluza-módra, hanem kivesszük (kevesebb többlet dimenzió is elegendő lesz ezáltal), és ezeket fermionjaink és a $4 + d$ dimenziós metrikus tenzor mellé explicite felvesszük.

Ez az 1976-ban keltezett ötlet már lehetővé teszi, hogy $M^4 \times B$ alakú üres tér megoldást (alapállapotot) vegyünk föl, ahol B egy kompakt halmaz (B-t rendszerint S/R alakban keressük, ahol S egy kompakt Lie-csoport, R pedig S-nek egy normálosztója). Ezt az alapállapot választást spontán kompaktifikációnak nevezzük. Az elnevezés azt tükrözi, hogy ilyenkor azt gondoljuk, hogy világunk csak kis energián esik bele egy „fodrozódó 4 dimenziós + kompakt egyéb" alakú téridőbe, magasabb energiákon a kompakt rész is „ficánkolni, nyújtózkodni kezd".

Tehát elméletünkhöz vegyük föl a $4 + d$ dimenziós Einstein–Hilbert-féle gravitációs hatást. Ehhez a fermionok szokásos hatásán kívül csapjuk hozzá néhány mértékmező szokásos hatását. Kaluza eldobta az $n \neq 0$ módusokat, mi viszont ezeket is megtartva írjuk fel a hatásunk variálásából adódó Euler–Lagrange-egyenleteket. Megnézve, hogy az így nyert kvantumtérelmélet milyen részecskéket tartalmaz, azt látjuk, hogy a lehetséges részecsketömegek vagy 0-k, vagy a Planck-tömeg nagyságrendjébe esnek.

Minthogy a tapasztalt fermionok tömege sokkal kisebb a Planck-tömegnél, ezért (jelölje G a néhány kiemelt mértékmezőhöz tartozó mértékcsoportot) olyan B-t és G-t szeretnénk, amelynél az ismert fermionjaink 0 tömegűek. (Nem egészen 0 tömegükről később gondoskodnánk, valami hasonló módon, mint az elektrogyenge elméletben, ahol a fermionok 0 tömegről indulnak, csak a Higgs-részecske ad nekik nem 0 tömeget az ún. spontán szimmetriasértés mechanizmusán keresztül.) Örömmel tapasztalhatjuk, hogy elég sok ilyen B és G választható, sőt jópár olyan is, melyben a 0 tömegű fermionok királisak.

Felmerül azonban egy másik észrevétel eme spontán kompaktifikációs modellekkel kapcsolatban. Ha ugyanis egy, az összes kölcsönhatást leíró elméletre pályázunk, akkor figyelembe kell venni a kozmológia azon észrevételét, hogy az Univerzum tágul. Így nem a sztatikus M^4-et kellene igazából választanunk alapállapotul, hanem egy időben változó $\mathcal{M}^4$-et. A valósághoz és az elmélethez egyaránt illeszkedő $\mathcal{M}^4$-ek keresésében már születtek bizonyos biztató eredmények, de kutatásuk, ugyanúgy mint a megfelelő B-k és G-k keresése, ma még messze nem lezárt terület.

A 11, a 26 és a 10 dimenzió

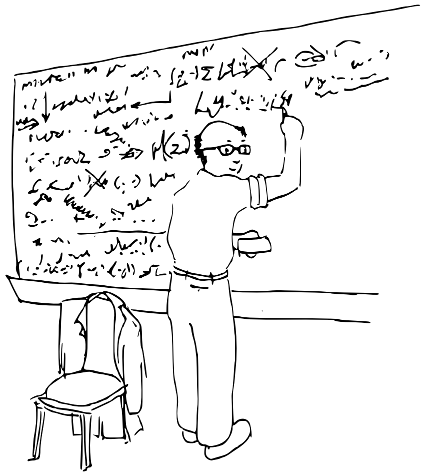
A spontán kompaktifikácós elméletek kifejlesztését az a tény katalizálta, hogy a 70-es években született néhány extra dimenziós, Nagy Egyesítéssel próbálkozó elmélet, és a többlet dimenziók „eltüntetésének" egyik lehetséges módja a kompaktifikálás. Ismerkedjünk meg ezekkel az elméletekkel!

A szuperszimmetrikus elméletek olyan kvantumtérelméletek, amelyek nemcsak a szokásos, részecskéket kevergető mértéktranszformációkra, hanem bozon-fermion felcserélésekre és keverésekre is invariánsak. Szupergravitációnak pedig azokat az elméleteket nevezzük, amelyek a gravitáció és a többi kölcsönhatás egyesítését szuperszimmetrikus elmélet keretében próbálták megvalósítani. Hamar kiderült, hogy egy ilyen elmélet csak 11 vagy magasabb dimenziójú téridőn fogalmazható meg, ha azt akarjuk, hogy mind az elektrogyenge, mind az erős kölcsönhatás mértékcsoportja beleférjen. Másrészt 11-nél magasabb dimenzióban az elmélet 2-nél nagyobb spinű részecskéket is jósol, ami tönkreteszi az elmélet konzisztenciáját. Tehát csak pont 11 dimenzió esetén lehet teljesíteni mindkét feltételt. Az elmélet abba nem szól bele, hogy ezek a dimenziók végtelen vagy véges kiterjedésűek legyenek. Így a spontán kompaktifikáció segíthet a fölös dimenziók amúgy meglehetősen zavaró problémáján. Bosszantó módon azonban van még két nagy gond a szupergravitációval. Az egyik, hogy – mint az hamarosan kiderült – királis fermionokat csak $8k + 2$ dimenziós elmélet tud jósolni ($k = 0, 1, 2, \dots$). A másik pedig az, hogy a gravitációt akár önmagában kvantálva, akár más, pl. szupergravitáció keretbe helyezve a kapott kvantumtérelmélet nem renormálható. Ez annyit jelent, hogy a folyamatok valószínűségeinek kiszámításakor olyan végtelenek lépnek fel, amelyek nem orvosolhatók a Lagrange-sűrűséghez hozzáadott véges számú korrekciós taggal. Az összes tisztán mértékelmélet (így az elektrogyenge és az erős kölcsönhatás elmélete is) renormálható, de a gravitációval való összeházasítás elrontja ezt a tulajdonságot. A nem renormálható elméletekben pedig sokkal nehezebb (gyakran reménytelen) számításokat végezni. Így hát fájó szívvel le kellett mondani arról, hogy a szupergravitáció oldja meg a Nagy Egyesítés problémáját.

Reménytkeltő viszont a húrelmélet, illetve annak „szuper” változata, a szuperhúrelmélet! A húrelmélet az elemi részecskéket nem pontszerűnek, hanem kicsiny 1 dimenziós objektumoknak, húroknak (pici cérnaszálaknak) képzeli. Egy ilyen húrt ha „megpendítünk”, különböző rezgési állapotok jöhetnek létre rajta, melyekhez különböző részecsketömegek tartoznak. Így a megfigyelt különböző részecskék egyetlen fajta húr különböző állapotainak tekinthetők. (Igazság szerint két fajta: nyílt és zárt húrról lehet beszélni, de ez az összes verzió.) Hasonlóan az elméletben csak egyetlenegy paraméter (a húr hossza) szerepel, ami sokkal vonzóbbá teszi az eddigi elektrogyenge meg erős elméleteknél, ezek ugyanis kb. 20, mérésből fölveendő paramétert tartalmaznak!

Sajnos a húrelmélet elsőre kidolgozott verziójának akadnak nemkívánatos tulajdonságai is. Az egyik az, hogy csak bozonokat képes származtatni, fermionokat nem. A másik, hogy tahionokat (negatív tömegnégyzetű részecskéket) is jósol. Az pedig már csak ráadás, hogy a kvantált húrelmélet csak 26 (!) dimenziós téridőn hajlandó konzisztens lenni.

„És ennél a pontnál észrevesszük, hogy képleteink nagymértékben egyszerűsödnek, ha föltesszük, hogy a téridő 92 dimenziós...



Így tehát le kellett arról mondani, hogy a húrelmélet (ebben a formájában) a Nagy Egyesítés alapja legyen.

Az a néhány kutató viszont, aki a fenti kellemetlen tulajdonságok ellenére is hitt a húrelmélet koncepciójában, nem adta fel, és kifejlesztette a bozonok és fermionok leírására egyaránt képes, szuperszimmetriával ellátott ún. szuperhúrelméletet. Ez már nem adott tahionokat (0-ról indult a tömegspektrum), és konzisztenciájához már nem 26, hanem csak 10 dimenzió kell. Nyilván a többlet dimenziók eltüntetése itt is spontán kompaktifikációval történhet. Ha az elmélet egyetlen paraméterét a Planck-hossznak választjuk (csak így lehet belecsempészni a játékba a gravitációs konstanst, márpedig mi gravitációval való egyesítést akarunk!), akkor a nem 0 tömegek a Planck-tömegnél kezdődnek. A jósolt részecskék között akad kettes spinű 0 tömegű is. Ez azért öröm, mert a gravitont, a gravitációt közvetítő (pontosabban a kvantumosan fluktuáló metrikus tenzor gerjesztéseit jelentő) részecskét pont ilyennek gondoljuk és keressük. További előny, hogy a szuperhúrelméletbe sokfajta mértékcsoport beépíthető. Ezek közül jópár olyan akad, melyek képesek egyrészt 0 tömegű fermionok származtatására, másrészt többé-kevésbé megfeleltethetők az eddig megismert elektrogyenge és erős mértékcsoportnak. És végül, de egyáltalán nem utolsósorban: az elmélet 1-hurok szinten (azaz az elméletben lejátszódó legegyszerűbb olyan részfolyamatokra, melyek egy kvantumtérelméletben rendszerint már végteleneket adnak) nemhogy renormálható, de egyenesen véges eredményeket ad! Ráadásul erős érvelések teszik valószínűvé, hogy az összes többi részfolyamatra is véges marad az elmélet, noha ezt még nem sikerült bebizonyítani.

Mindent összevetve megállapíthatjuk, hogy a szuperhúrelmélet a fizika eddigi legreménytkeltőbb elmélete a Nagy Egyesítés nagy feladatára.

Persze sok munka van még hátra, míg hátradőlhetünk a karosszékben. A szuperhúrelmélet egyelőre még csak olyan fázisban van, mint pontrészecskékre a sima kvantummechanika: csak húrok (részecskék) röpködését tudja leírni; azok keletkezésére és elbomlására nincs még dinamikai törvény, csak az összes elképzelhető részfolyamat ábráit tudjuk felrajzolgatni. Ahogyan a pontrészecskék esetén a kvantumtérelméletek kidolgozására volt szükség, itt is hiányzik még a húrtérelmélet, mely az összes részecskefolyamatra számszerű eredményt adna. A kutatás tehát továbbra is nagy erőkkel folyik.

Talán még a mi életünkben sikerül valóra váltani a fizikusok egyik nagy álmát, a Nagy Egyesítést. Ma úgy tűnik, ezt az elméleti fizika egy extra dimenziós elmélettel fogja elérni. Ez esetben hozzá kell majd szoknunk ahhoz, hogy a világot 4-nél több dimenziósnak gondoljuk, ha a többlet dimenziók nem is jelentkeznek mindennapos tapasztalatainkban. A fizika eddig is sok alapvető ponton változtatta meg az emberiség világról alkotott képét. Az extra térdimenziók jelentkezése egy újabb olyan eset lehet, ahol egy természetesnek ható, magától értetődő elképzelésünket egy szokatlan, nem szemléletes, de a Természet jelenségeinek leírásához szükséges új elképzeléssel kell felváltanunk.

Vége

Felhasznált és egyben ajánlott irodalom:

1. *A tízdimenziós világ*
(a The Economist 1986. január 18-i számában megjelent cikk fordítása, mely a LUFI magazin 1986/4 és 1987/1 számaiban jelent meg; ismeretterjesztő cikk)

2. Appelquist, Chodos & Freund: *Modern Kaluza–Klein Theories*
(a Fizikus Könyvtárban megtalálható; a terület egy bő és igen értékes áttekintése után a témában fontos előrehaladást jelentő cikkeket tartalmazza)

3. Palla László: *Kompaktifikáció és dimenziós redukció többdimenziós Einstein–Yang–Mills elméletekben és húrelméletekben*
(nagydoktori munkásság tézisszerű összefoglalója, egy tömör bevezetés után a szerző eredményeit ismerteti, melyből a terület legfrissebb állására nyerhetünk betekintést)

4. Green, Schwarz & Witten: *Superstring Theory*
(fénymásolatban állt rendelkezésemre, a húrelmélet igen alapos ismertetését adja)

LaTeX-ben újraszedte és az ábrákat vektorosította: Szabó Áron 2024-ben.