GALILEI-RELATIVISZTIKUS FOLYADÉKMECHANIKA

VÁN P.[1,2,3]

Kivonat. Az egykomponensű Galilei-relativisztikus disszipatív folyadékokat vonatkoztatási rendszertől függetlenül tárgyaljuk. Megadjuk az alapmennyiségeket, ezek mérlegeit, a termodinamikai összefüggéseket és kiszámoljuk az entrópiaprodukciót.

A szokásos alapmennyiségek, tömeg, lendület, energia, hőáram, nyomástenzor és diffúziós áramsűrűség a harmadrendű tömeg-lendület-energia tenzornak egy sebességmező szerinti idő- és térszerű komponensei. Levezetjük az alapmennyiségek és mérlegek transzformációs szabályait és bebizonyítjuk, hogy a nemegyensúlyi termodinamikai keretelmélet, azaz a Gibbs-reláció, az extenzivitási feltétel és az entrópiaprodukció is abszolút, azaz független a vonatkoztatási rendszertől és a folyadék sebességétől. A relatív kontinuitási-Fourier-Navier-Stokes-féle egyenletek hagyományos formáját akkor kaphatjuk meg ha a közeg sebességmezőjét termodinamikailag rögzítjük.

Az elmélet egyik következménye, hogy a belső energia, a kinetikus energia és a teljes energia közti kapcsolat az az energiára vonatkozó Galilei-transzformációs szabály.

1. Bevezetés

A kis sebességű fizikai folyamatokra vonatkozó tapasztalataink leírására kialakult az abszolút, mozgástól függetlenül múló idő fogalma. A tér azonban ekkor is relatív, különbözik az egyes megfigyelők számára. A nemrelativisztikus téridő Galilei-relativisztikus. A nagy sebességű mozgások és a fizika mezőelméletei alapján ismert (speciális) relativisztikus téridő fogalmai segítségével az abszolút időt és relatív teret tartalmazó klasszikus téridőnek is adhatunk pontos matematikai modellt [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8].

Noha a mindennapi tapasztalataink körében látszólag magabiztosan mozgunk, egy ilyen téridő-modell ma már elengedhetetlenül fontos az elvi kérdések pontos megfogalmazása és átlátása érdekében. Gondoljunk csak arra, hogy a klasszikus térfogalom fejlődése folyamán is a matematikai eszközöknek a valódi fizikai tartalomhoz történő igazítása milyen előnyökkel járt. Például a koordinátázás kiküszöbölése és az absztraktabb, valós számhármasok helyett vektorterekre alapozott jelölésmód lényegesen megkönnyítette a klasszikus térelméletek elvi kérdéseinek átgondolását. Ma már a koordinátamentes jelölés és az erre alapozott számítási módszerek általánosan elterjedtek a mérnöki gyakorlatban is.

Ebben a munkában az egykomponensű folyadékok példáján amellett érvelünk, hogy az időt is érdemes bevonnunk egy hasonló leírásba. Egy téridő-modell fogalmaival ilyen módon a koordinátázáshoz hasonlóan kiküszöbölhető a vonatkoztatási

Date: 2015. augusztus 4.

rendszer a folyadékok leírásából. Így a legmegszokottabb összefüggéseink átláthatóbbak, világosabbak, szebbek és legfőképpen általánosíthatóbbak, ezáltal végső soron alkalmazhatóbbak lesznek.

A Galilei-relativisztikus téridő legfontosabb sajátossága, hogy az idő abszolút, azaz függetlenül telik a különféle megfigyelők számára. Az *abszolút* jelzőt a továbbiakban pontosan ilyen értelemben, a vonatkoztatási rendszertől való függetlenség jelzésére fogjuk használni; kerüljük viszont a hasonló jelentésű, de az irodalomban többféle értelemben használt objektív vagy kovariáns jelzőket.

Régóta ismeretes, hogy tér és az idő nem vektortér, hanem valójában affin tér, hiszen nincs kitüntetett középpontja [1, 3, 4]. A mi tárgyalásunkban ez most nem fontos, ezért bármily kézenfekvő is a megfelelő általánosítás, ebben a munkában lényegében csak vektorterek fordulnak elő, a Galilei-relativisztikus téridő egy egyszerűsített modelljét használjuk. Az A függelékben adjuk meg pontosabban, hogy milyen értelemben. Hasonlóan nem foglalkozunk a mértékegységek megfelelő matematikai reprezentációjával, bármennyire is érdekes ez gyakorlati és elvi szempontból is [9, 10, 11].

A középpontmentesség, illetve a mértékegységek elégtelen matematikai reprezentációja mellett megszokott téridő képünkben van egy másik probléma, amely első pillantásra az előbbiektől is egyszerűbbnek és kevésbé fontosnak tűnhet: *az abszolút idő nem részhalmaza a négydimenziós Galilei-relativisztikus téridőnek.* Időnek és térnek nincs bezárt szöge, de azt $\mathbb{R}^4$-ként, vagy más módon euklidészi terek Descartes-szorzataként reprezentálva óhatatlanul megfigyelőtől függő lesz a leírásunk. Az idő megfelelő reprezentációjának nagyon lényeges következményei vannak. Egyik legfontosabb, hogy nemrelativisztikus fizikai elméletekben téridő vektorok és kovektorok között nincs kitüntetett megfeleltetés. Ebben a tekintetben a Galilei-relativisztikus téridő nem határesete bonyolultabb a matematikájú speciális vagy általános relativitáselméletnek, az objektív fizikai mennyiségek kezelése különbözik a relativisztikus számításokban megszokottól, a relativisztikus számításokban járatosak számára is odafigyelést igényel. Például másodrendű tenzornak és kotenzornak nincs nyoma (spurja). Ezért téridőkovektornak nincs abszolút divergenciája és téridővektornak nincs abszolút rotációja. Ugyancsak ennek a következménye, hogy vektorok és kovektorok nem ugyanúgy transzformálódnak, vagyis egyik megfigyelő relatív mennyiségeit átszámolva a másik megfigyelő mennyiségeire más a szabály. A harmadik lényeges dolog, ahol a Galilei-relativisztikus téridő különbözik a speciális relativisztikustól, az, hogy nemcsak a téridőmennyiségek abszolútak, hanem típustól függően azok bizonyos részei is. Vektor időszerű komponense, kovektor térszerű komponense abszolút.

Számos olyan probléma jelentkezik a nemrelativisztikus fizikában, amely a téridő pontatlan modellje miatt lép fel.

(1) Egyik legfontosabb és nagyon sokrétűen vitatott az úgy nevezett anyagi objektivitás elve. Az elv fizikailag magától értetődő állítást fogalmaz meg, azt mondja ki, hogy az anyag független a megfigyelőtől és ezért az anyagot leíró fizikai mennyiségek, vonatkozó mozgásegyenletek és anyagtörvények is azok kell legyenek. Nemrelativisztikusan, az abszolút idő miatt, általában csak a hármasvektorként reprezentálható mennyiségekre vonatkozó transzformációs invarianciaként adják meg az elv matematikai megfogalmazásait. Könnyen

látható, hogy kontinuumok esetén az inerciarendszerekre alapozott Galilei-transzformációra invariáns formák megkövetelésétől több kell, ezért az elv legelfogadottabb, Noll-tól származó megfogalmazása a forgásinvarianciát is megköveteli [12, 13, 14, 15, 16]. Mind a megfogalmazás, mind maga az elv nagyon kiterjedt vitát gerjeszt máig is a kontinuumfizika alapjai iránt érdeklődők körében. A legfontosabbnak tűnő munkák a teljesség igénye nélkül: [17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42].

A Galilei-relativisztikus téridő-modell segítségével megmutatható, hogy egyrészt a formális invariancia (forgó megfigyelő szögsebességétől való függetlenség) nem megfelelő követelmény, sőt a vonatkoztatási rendszertől való függetlenség megkövetelheti, hogy a transzformációs szabályok tartalmazzák a relatív mozgás jellemzőit [43]. Ez a Galilei-transzformáció esetén elég nyilvánvaló, mint látni is fogjuk. Ráadásul téridő szempontból a Noll-féle anyagi objektivitás definíció önellentmondásos [44].

(2) A kontinuummechanikai alapmennyiségektől szintén elvárható a vonatkoztatási rendszertől függetlenség. Például a véges rugalmas deformáció végtelen sok Noll értelemben objektív mértéke helyett a téridő modell egyértelműen kitüntet egyetlen természetes deformációfogalmat [45, 46, 47], amely más szempontokból is megkülönböztetett [48, 49, 50, 51, 52].

(3) Egy másik problémakör a folyadékok leírásának alapmennyiségére, a folyadék sebességére vonatkozik. Brenner szerint a kontinuitási egyenletben és a lendületmérlegben előforduló sebességek nem nyilvánvalóan ugyanazok [53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62]. Ez a kérdés analóg a relativisztikus elméletekben felmerülő áramlásválasztás kérdésével [63]. Vagyis tudjuk-e hogy mi tulajdonképpen a folyadék sebessége? Mi mozog a folyadékban, a tömege, lendülete vagy energiája? Van választásunk ennek kijelölésében? Mivel az összes szokásos egyenletben relatív sebességek fordulnak elő, ezért ennek a kérdésnek megválaszolásához a téridőviszonyok pontos átgondolása is szükséges.

(4) Egy másik, természetesen felvetődő szempont a relativisztikus disszipatív folyadékok elméletével való konzisztencia. Ennek kapcsán talán a legszembetűnőbb eltérés a relativisztikus és nemrelativisztikus elmélet között, hogy relativisztikusan az energia-impulzus tenzor kovariáns (azaz abszolút) és ennek természetes része az energia, transzformációs tulajdonságai pedig ebből következnek. Mi lehet az ennek megfelelő fizikai mennyiség Galilei-relativisztikusan? A kinetikus energia a relatív sebességgel kifejezve nyilvánvalóan nem abszolút mennyiség. De ha nem az, akkor meghatározott módon kell változzon vonatkoztatási rendszer váltásakor. Tulajdonképpen hogyan transzformálódik az energia?

(5) Természetesen a statisztikus leírásokkal, pontosabban a kinetikus gázelmélettel való konzisztencia is lényeges. Hiszen onnan kiindulva a téridő beágyazottság meghatározható, legalábbis bizonyos transzformációs szabályokra következtethetünk [64, 65]. Másrészt pedig a kontinuum alapmezőnek és az ezekre vonatkozó mozgásegyenleteknek a származtatási módja (Chapman-Enskog vagy momentum-sorfejtéssel) a termodinamikai mennyiségekre vonatkozóan is informatív, például az energia a nyomással szoros kapcsolatban

határozódik meg. Ugyanakkor érdekes módon magának a kinetikus elméletnek az objektivitása (azaz abszolút volta) is kérdésessé vált az elégtelen téridő modell használata miatt [65].

(6) Kérdés még a kontinuumok esetén lokális egyensúlyként értelmezett termodinamikai háttér relatív vagy abszolút volta is. Relativisztikusan a mozgó testek termodinamikai leírásától, beleértve elsősorban a Gibbs-relációt, alapvetően elvárjuk a kovarianciát, és ez egy lényeges kérdés már speciális relativitáselmélet kezdetei óta (lásd pl. [66]). Érdekes módon nemrelativisztikusan ez csak ritkán merül fel [67], pedig a lokális egyensúly csak lokális homogenitást jelent. A termodinamikai mennyiségek Galilei-kovarianciája (azaz abszolút volta) egyáltalán nem nyilvánvaló, gondoljunk az előző pontban emlegetett energiára. Ezért az egész Gibbs-reláció Galilei-kovarianciája sem az. Ugyanide tartozik a disszipáció, illetve a termelődő hő abszolút volta is: függhetnek ezek attól, hogy milyen vonatkoztatási rendszerből nézem?

(7) Végül pedig fontos megemlíteni, hogy egy téridő modell számos elvi kérdést egyszerű és egyértelmű módon elrendez, ezáltal olyan alapokat nyújt az általánosításokhoz, amely számos tévutat elkerülhetővé tesz a gondolkozásunkban. Ilyen például az inerciarendszerek kiemelt szerepe. A Galilei-relativisztikus, azaz a nemrelativisztikus téridő modell keretei között az inerciarendszerek és általában a vonatkoztatási rendszerek másodlagos, származtatott fogalmak, amelyekre általános kérdések esetén nem alapozhatunk, ellentétben a közhiedelemmel [68, 69].

A továbbiakban az egykomponensű Galilei-relativisztikus folyadékok abszolút alapmezőit, a rájuk vonatkozó mérlegeket, termodinamikai összefüggéseket és végül az entrópiaprodukciót számoljuk ki. Ezzel párhuzamosan a relatív, szokásos tárgyalást is beillesztjük a gondolatmenetbe, párhuzamosan megadva a megfelelő transzformációs szabályokat és a pontos feltételeket is, amelyekkel az abszolút egyenletekből a relatív kontinuitás-Navier–Stokes-Fourier-egyenletrendszer megkapható.

Ebben az írásban egy sajátos absztrakt indexes formalizmust használunk [70], amely remélhetőleg elégé áttekinthető és rugalmas ahhoz, hogy egyszerűen megértsük a folyadékmechanika mennyiségeinek vonatkoztatási rendszertől független értelmét, illetve az abszolút téridő tenzorokkal számításokat végezzünk. Háromféle indexet vezetünk be. A Galilei-relativisztikus téridő négyesvektorait és négyestenzorait felső $a, b, c, ...$ indexekkel, a kovektorokat, kotenzorokat alsó $a, b, c, ...$ indexekkel jelöljük. Továbbra is az abc elejéről választva, de felülvonással $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, ..$ módon, térszerű négyesvektori és négyeskovektori indexeket jelölünk. Fontos, hogy a Galilei-relativisztikus téridő modellben az $a, b, c, ...$ indexek felső vagy alsó helyzete rögzített, mert téridővektoroknak nincs hossza, ezért nincs megfigyelőtől független azonosítás a vektorok és kovektorok között. Ezzel szemben a térszerű $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, ...$ indexek áthelyezhetők alulról felülre és viszont, mert a térben van távolság (euklideszi forma). A megszokott relatív (azaz anyagra és megfigyelőre egyaránt vonatkozó) háromdimenziós vektorok és tenzorok indexeit megkülönböztetetten $i, k, l, ..$ jelöli; ezeket tetszés szerint felülre vagy alulra írhatjuk. Ilyen indexeket használunk akkor, ha egy formulában akár egyetlen ilyen relatív vektor (tipikusan a relatív sebesség) szerepel. A téridőmodellt, az alkalmazott számítási módot és jelölésrendszert részletesen a függelékek tartalmazzák. A tárgyalás kezdettől fogva alapoz a Galilei-relativisztikus téridő modell alapjait ismertető A és a legfontosabb transzformációs szabályokat levezető B függelékek részletes ismeretére.

2. Mérlegek és transzformációs szabályaik

A kontinuumfizika alapvető mérlegeit a közeg egyes fizikai mennyiségeinek extenzivitását kifejező téridő sűrűségvektorok és sűrűségtenzorok négyesdivergenciáival fejezzük ki. Egy adott téridőtartományban a fizikai mennyiség megváltozása a tartományban történő lokális változásból és a tartomány határán történő kiáramlásból adódik össze. Ezt szokásosan a közeg u^a négyessebességmezője szerinti széthasított mennyiségekkel fejezzük ki. Tehát egy megmaradó mennyiséget leíró A^a vektormezőnek az u^a sebességmező szerinti idő- és térszerű komponenseivel kifejezett $A^a = Au^a + A^{\bar{a}}$ u-formáját használjuk:

$$\partial_a A^a = D_u A + A\partial_a u^a + \partial_a A^{\bar{a}} = D_u A + A\nabla_{\bar{a}} u^a + \nabla_{\bar{a}} A^{\bar{a}} = 0, \tag{1}$$

ahol a téridőindex, $\bar{a}$ térszerű index. $A = \tau_a A^a$ és $A^{\bar{a}} = \pi^{\bar{a}}_b A^b$ az A^a vektor idő- és u-térszerű részei, illetve $D_u = u^a\partial_a$ és $\nabla_{\bar{a}} = \delta_{\bar{a}}^{\,b}\partial_b$ a téridő deriválás idő- és térszerű része, vagyis a relatív u-idődérivált és az abszolút térderivált (lásd A függelék). (1) az abszolút mérleg u-mennyiségekkel, az A^a téridő vektor és a ∂_a deriválás u-időszerű és u-térszerű részeivel, kifejezett formája. Tehát a fenti (1) mérlegegyenlet abszolút, mert nem hivatkozik megfigyelőre, sőt független a közeg u^a sebességmezőjétől is, amelyet a felbontására használtunk.

A kontinuumok lokális és szubsztanciális relatív mérlegeiben relatív sebesség szerepel, amely a közeg u négyessebességmezőjének és egy külső inerciális megfigyelő állandó u' négyessebességének a különbsége. Mindig feltételezzük, hogy a külső megfigyelő inerciális, azaz u' állandó. Az u' sebesség szerinti idő- és térszerű komponensekkel kapjuk a mérleg *lokális* formáját

$$\partial_a A^a = D_{u'} A + A\partial_a u'^a + \partial_a A'^{\bar{a}} = D_{u'} A + \nabla_{\bar{a}} A'^{\bar{a}} = 0, \tag{2}$$

mert $u'^a =$ állandó. Az abszolút (1) mérleg *szubsztanciális* formáját úgy kapjuk, hogy a közeg u sebessége helyett a közegnek a megfigyelőre vonatkozó $v^{\bar{a}} = u^a - u'^a$ relatív sebességét helyettesítjük az egyenletbe:

$$\partial_a A^a = D_u A + A\partial_a u^a + \partial_a A^{\bar{a}} = D_u A + A\nabla_{\bar{a}} v^{\bar{a}} + \nabla_{\bar{a}} A^{\bar{a}} = 0, \tag{3}$$

mert $u^a = u^a - u'^a + u'^a = v^{\bar{a}} + u'^a$ és $u'^a =$ állandó. Az idő szerinti deriváltat lokális mérlegek esetén $D_{u'} = \partial_t$-vel, szubsztanciális mérlegeknél $D_u = d_t$-vel szokás jelölni, ez utóbbira a felülpontozás is használatos, mi is ezt alkalmazzuk, tehát $D_u A = d_t A = \dot{A}$.

Külön jelölésmóddal, a hármasindexek szokott i, j, k betűzésével megkülönböztetjük azokat a formulákat, amelyek egy külső megfigyelőre vonatkoznak. Ezért a (2) lokális mérleg:

$$\partial_t A + \nabla_i A'^i = 0, \tag{4}$$

illetve a szubsztanciális:

$$\dot{A} + A\nabla_i v^i + \nabla_i A^i = 0. \tag{5}$$

A kovektorok és vektorok transzformációs szabályai szerint $\partial_t = \frac{d}{dt} - v^i\nabla_i$, illetve $A'^i = A^i + Av^i$ (lásd B függelék), így jól látható, hogy a fenti két mérleg transzformációs oldalról nézve is ugyanaz.

Tehát a mérlegek két relatív alakja, a szubsztanciális és a lokális forma a közeg u^a és egy megfigyelő u'^a sebességmezője szerint széthasított négyesderivált és négyesvektormező kombinációitól függ. Fontos megjegyeznünk, hogy a megfigyelő sebességmezője adott, a közegé meghatározandó, az erre vonatkozó differenciálegyenleteket keressük. Az abszolút leírás független *bármilyen* megfigyelőtől. A szokásos, inerciális megfigyelőkre érvényes Galilei-transzformációs szabályok segítségével objektivitásra, illetve vonatkoztatási rendszer függetlenségre csak fenntartásokkal következtethetünk [41].

A fizikai információt az A^a vektor, annak négyesdivergenciája, valamint a közeg u^a sebességmezője tartalmazza. Nem mondtuk meg, és egyelőre nyitva hagyjuk a kérdést, mi a fizikai értelme a közeg sebességmezőjének. Látni fogjuk, hogy a sebességmezők értelmezéséhez termodinamikai megfontolások elengedhetetlenek.

Mielőtt azonban erre rátérnénk tisztáznunk kell, hogy milyen fizikai mennyiségek jellemzik az egyszerű folyadékokat, azaz mi lehet a vonatkoztatási rendszertől független, abszolút háttere az ismert relatív mennyiségeknek és mérlegeknek.

2.1. Hányad rendű tenzor vagy kotenzor?. A relativisztikus folyadékelmélet alapján kézenfekvő, hogy a fizikai mennyiségek nemcsak skalárok és négyesvektorok, hanem magasabb rendű tenzorok is lehetnek. Leginkább egy energiavagy tömegimpulzus tenzor bevezetése látszik kézenfekvőnek. Kérdés, hogy Galileirelativisztikusan mi lehet az egykomponensű közegeket jellemző fizikai mennyiség?

A Galilei-relativisztikus téridő szigorúbb feltételeket jelent, mint a speciális relativisztikus, mert a téridővektorok és kovektorok között csak a lineáris szerkezet jelent összeköttetést. Téridőkovektormezőnek, kotenzormezőnek nem képezhető divergenciája és így mérlege sem lehet alapvető, illetve vegyes tenzoroknak nem tudjuk sem a szimmetrikus, sem az antiszimmetrikus részét képezni.

Másrészt az ismert fizikai mennyiségeknek ismert transzformációs tulajdonságai vannak. A vonatkoztatási rendszertől független, téridőre alapozott tárgyalás esetén a tér- és időszerű komponensek transzformációs szabályai következnek a téridőn definiált mennyiségek tulajdonságaiból. Ezt az elméleti keretet kell összehangolni a tapasztalattal. Például tudjuk, hogy bizonyos fizikai mennyiségek a helyzethez hasonlóan Galilei-traszformálódnak. Azonban van egy másik, kézenfekvően transzformációs szabálynak tekinthető megszokott összefüggésünk is. A teljes energia a belső és a kinetikus energia összege, tehát a közeghez rögzített vonatkoztatási rendszerből nézve az energia maga a belső energia, ahhoz képest adott sebességgel mozogva pedig kiegészítődik a kinetikus energiával. Ezek szerint kontinuumokban az e_T teljes energiasűrűség és az e_b belső energiasűrűség eltérő

$$e_T = e_b + \frac{\rho}{2}v^2. \tag{6}$$

Látszólag két egymáshoz képest v^i relatív sebességgel mozgó vonatkoztatási rendszer közötti áttérésről, azaz egy transzformációs szabályról van szó.

Ez alapján következtethetünk arra, hogy milyen típusú fizikai mennyiség lehet az energiasűrűség. A B függelékben megadtuk, hogy egy transzformációs szabály két különböző megfigyelő, azaz négyessebességmező által idő- és térszerű részekre bontott négyestenzorok komponenseinek viszonyát adja meg a relatív sebességek segítségével. Kiszámoltuk továbbá a téridő vektorok, kovektorok és a másodrendű tenzorok transzformációs tulajdonságait. Ez alapján látjuk, hogy ilyen szabályhoz legalább másodrendű tenzor kell. Egy másodrendű kotenzornak az idő-időszerű komponense, egy másodrendű tenzornak pedig a tér-térszerű komponense transzformálódik a sebességgel négyzetesen.

Másodrendű kotenzor-mezőnek Galilei-relativisztikusan nem képezhetjük a divergenciáját, de a kontinuumok alapegyenletei mérlegek, ezért az energia értékei lehetnek például egy $\mathbb{M}\otimes\mathbb{M}^*\otimes\mathbb{M}^*$ harmadrendű vegyes tenzor idő-időszerű komponensei.

Egy további követelmény lehet a kinetikus elmélettel való kompatibilitás is. A szokásos nemrelativisztikus elméletben a belső energia egy másodrendű relatív tenzornak, pontosabban az egyrészecske valószínűségsűrűség függvény relatív sebességgel képezett második momentumának nyomaként adódik [65, 71]. A kinetikus elméletben ezzel összefüggésben, az ideális gáz nyomásra vonatkozó állapotegyenletével összekötve kapjuk az energiát. Téridő szempontból azonban másodrendű tenzor nem elegendő, hiszen az energiamérleghez az energia árama, azaz a következő momentum, mint harmadrendű hármastenzor is kell. Ezt kiválóan mutatja a másodrendű tenzoron alapuló Galilei-relativisztikus abszolút elmélet, ahol az energiamérleg függetlenül léphet csak fel [72]. A kinetikus elmélet harmadik momentumára tekintettel pedig megsejthetjük, hogy a fenomenologikus elméletben harmadrendű tenzor, azaz $\mathbb{M}\otimes\mathbb{M}\otimes\mathbb{M}$ eleme az alapmennyiség. Ilyen értékű függvény divergenciája egyszerre kell megadja a Galilei-relativisztikus kontinuumelmélet alapmérlegeit a tömegre, a lendületre és az energiára vonatkozóan. A következő fejezetekben megmutatjuk, hogy ennek az alapmennyiségnek a segítségével valóban következetes elméletet építhetünk fel.

Meglepő módon elég hasonló eredményt kapunk akkor is, ha feltesszük, hogy az előbb említett harmadrendű vegyes tenzor az alapmennyiség. Mindkét esetben ugyanazok a transzformációs szabályok és ugyanaz az entrópiaprodukció adódik (hosszú számolás után). A kinetikus elmélet hagyományos energiafelfogásával történő kompatibilitás azonban a harmadrendű tenzor választását tünteti ki, ezért a továbbiakban ezt tekintjük a Galilei-relativisztikus kontinuumok abszolút fizikai alapmennyiségének.

A teljes, kinetikus és belső energia fenti, (6) egyenletben felírt viszonyát alaposabban átgondolva ellenőrizhető, hogy az a formula minden további nélkül mégsem lehet valódi transzformációs szabály. Ugyanis egy harmadik vonatkoztatási rendszert is figyelembe véve nem tranzitív összefüggés. Vagyis első pillantásra vonzónak tűnő ötletünk, hogy az energia valamely abszolút mennyiség része, látszólag nem jó. A továbbiakban látni fogjuk, hogy ennek az oka, hogy (6) túlzottan leegyszerűsíti a valódi, relatív mennyiségekkel nehezen átgondolható viszonyokat.

3. Az tömeg-lendület-energia tenzor és transzformációs szabályai

Ezek után tekintsünk egy $Z^{abc} : M \to \mathbb{M}\otimes\mathbb{M}\vee\mathbb{M}$ tenzormezőt, az egykomponensű egyszerű anyag *tömeg-lendület-energia tenzorát.* Feltételezzük, hogy a tenzormező második és harmadik rendjében szimmetrikus, ezt jelzi a $\vee$ szimbólum az értékkészlet jelölésében. A továbbiakban ezt a $Z^{abc} = Z^{acb}$ szimmetriát nem jelöljük külön, csak utalunk rá a fontos esetekben. Ez a tenzor a közeg u^a négyes sebessége által széthasított komponensekkel a következő általános u-formába írható:

$$Z^{abc} = z^{bc}u^a + z^{\bar{a}bc}$$
$$= \left(\rho u^b u^c + p^{\bar{b}}u^c + u^b p^{\bar{c}} + e^{\bar{b}\bar{c}}\right)u^a + \left(j^{\bar{a}}u^b u^c + P^{\bar{a}\bar{b}}u^c + P^{\bar{a}\bar{c}}u^b + q^{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}\right), \tag{7}$$

ahol

$$z^{bc} = \tau_a Z^{abc}, \tag{8}$$
$$z^{\bar{a}bc} = \pi^{\bar{a}}_{\ d} Z^{dbc}. \tag{9}$$

Ez a két komponens a sűrűségek és az áramok tenzorai, azaz a z^{bc} *tömeg-lendület-energiasűrűség tenzor*, illetve $z^{\bar{a}bc}$ a *diffúzió-nyomás-energiaáramsűrűség tenzor*. τ_a az időkiértékelés, $\pi^{\bar{a}}_{\ b}$ pedig a négyesvektorok u-térszerű részét képező u-projekció. A további jelölések pedig:

- $\rho = \tau_b\tau_c z^{bc} = \tau_a\tau_b\tau_c Z^{abc}$ a tömeg-lendület-energia tenzor tenzor idő-idő-időszerű része, a *sűrűség*.
- $p^{\bar{b}} = \pi^{\bar{b}}_{\ d}\tau_c z^{dc} = \tau_a\pi^{\bar{b}}_{\ d}\tau_c Z^{adc}$ a tömeg-lendület-energia tenzor idő-idő-térszerű része, a *lendületsűrűség*. A tenzor szimmetriája miatt ez megegyezik a $p^{\bar{c}} = \tau_b\pi^{\bar{c}}_{\ d}z^{bd}$ idő-tér-időszerű résszel.
- $e^{\bar{b}\bar{c}} = \pi^{\bar{b}}_{\ d}\pi^{\bar{c}}_{\ e}z^{de} = \tau_a\pi^{\bar{b}}_{\ d}\pi^{\bar{c}}_{\ e}Z^{ade}$ az *energiasűrűség tenzor*, a Z^{abc} tenzor idő-tér-térszerű része.
- $j^{\bar{a}} = \pi^{\bar{a}}_{\ d}\tau_b\tau_c Z^{dbc}$ az *(ön)diffúziós áramsűrűség*, a Z^{abc} tenzor tér-idő-időszerű része.
- $P^{\bar{a}\bar{b}} = \pi^{\bar{a}}_{\ d}\pi^{\bar{b}}_{\ e}\tau_c Z^{dec}$ a *nyomás*, a Z^{abc} tenzor tér-idő-térszerű része. A tenzor szimmetriája miatt ez egyenlő $P^{\bar{a}\bar{c}} = \pi^{\bar{a}}_{\ d}\tau_b\pi^{\bar{c}}_{\ e}Z^{dbe}$ -vel.
- $q^{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} = \pi^{\bar{a}}_{\ d}\pi^{\bar{b}}_{\ e}\pi^{\bar{c}}_{\ f}Z^{def}$ az *energiaáramsűrűség tenzor*, a Z^{abc} tenzor tér-tér-térszerű része.

Ezenkívül, a megfelelő tenzorok rendjét kettővel redukálva, bevezetjük az energiasűrűséget és a hőáramsűrűséget, a kinetikus elmélet definícióinak megfelelően:

- $e = \frac{1}{2}e^{\bar{a}}_{\ \bar{a}}$ az *energiasűrűség*,
- $q^{\bar{a}} = \frac{1}{2}q^{\bar{a}\bar{b}}_{\ \ \bar{b}}$ a *hőáramsűrűség*.

Mindezek a mennyiségek csak a közegre vonatkozó adatokat tartalmaznak, megfigyelőre utalás nem szerepel bennük.

3.1. A idő- és térszerű részek transzformációs szabályai. Egy u'^a négyessebességű tehetetlenségi megfigyelő szerint képzett idő- és térszerű komponensek már relatív mennyiségek, ezeknek az u^a sebességgel képzett komponensekkel való kifejezését nevezzük az adott fizikai mennyiség transzformációs szabályának. A B függelékben megadtuk az első és másodrendű tenzorok transzformációs szabályait, amelyet úgy kapunk, hogy a tenzorok u-formáját az u' sebesség szerint hasítjuk szét. A tömeg-lendület-energia tenzor esetén is ugyanígy járunk el.

Az u'-energiát az Z^{abc} tenzor u-komponenseivel és a $v^{\bar{a}} = u^a - u'^a$ relatív sebességgel fejezzük ki; ez a folyadék sebessége a megfigyelőhöz képest. Ekkor az alábbi transzformációs szabályok a megfigyelő szerint széthasított mennyiségeket adják meg a folyadék saját maga által széthasított fizikai mennyiségeivel kifejezve.

A ρ sűrűség Galilei-skalár:

$$\rho' = \tau_a\tau_b\tau_c Z^{abc} = \rho. \tag{10}$$

A lendületsűrűség a sűrűséggel abszolút négyesvektort alkot, ennek megfelelően egy négyesvektor térszerű komponenseként transzformálódik:

$$\begin{aligned} p'^{\bar{b}} &= \pi'^{\bar{b}}{}_d \tau_c z^{dc} = \pi'^{\bar{b}}{}_d \tau_c (\rho u^d u^c + p^{\bar{d}} u^c + u^d p^{\bar{c}} + e^{\bar{d}\bar{c}}) = (\delta^{\bar{b}}_{\bar{d}} - u'^b \tau_d)(\rho u^d + p^{\bar{d}}) \\ &= p^{\bar{b}} + \rho v^{\bar{b}}. \end{aligned} \tag{11}$$

Az (ön)diffúziós áramsűrűség a lendületsűrűséghez hasonlóan a sűrűséggel vett négyesvektor térszerű komponenseként transzformálódik:

$$j'^{\bar{a}} = j^{\bar{a}} + \rho v^{\bar{a}}. \tag{12}$$

Az energiasűrűség viszont nem Galilei-skalár:

$$\begin{aligned} e' &= \frac{\delta_{\bar{b}\bar{c}}}{2} \pi'^{\bar{b}}{}_d \pi'^{\bar{c}}{}_e z^{de} = \frac{\delta_{\bar{b}\bar{c}}}{2} (\delta^{\bar{b}}_{\bar{d}} - u'^b \tau_d)(\delta^{\bar{c}}_{\bar{e}} - u'^c \tau_e) \left(\rho u^d u^e + p^{\bar{d}} u^e + u^d p^{\bar{e}} + e^{\bar{d}\bar{e}}\right) \\ &= \frac{\delta_{\bar{b}\bar{c}}}{2} \left(\rho v^{\bar{b}} v^{\bar{c}} + p^{\bar{b}} v^{\bar{c}} + v^{\bar{b}} p^{\bar{c}} + e^{\bar{b}\bar{c}}\right) = e + p_{\bar{a}} v^{\bar{a}} + \frac{\rho}{2} v_{\bar{a}} v^{\bar{a}}. \end{aligned} \tag{13}$$

A nyomástenzor transzformációja:

$$\begin{aligned} P'^{\bar{a}\bar{b}} &= \pi'^{\bar{a}}{}_d \pi'^{\bar{b}}{}_e \tau_c Z^{dec} = (\delta^{\bar{a}}_{\bar{d}} - u'^a \tau_d)(\delta^{\bar{b}}_{\bar{e}} - u'^b \tau_e) \left(\rho u^d u^e + p^{\bar{d}} u^e + u^d j^{\bar{e}} + P^{\bar{d}\bar{e}}\right) \\ &= P^{\bar{a}\bar{b}} + p^{\bar{b}} v^{\bar{a}} + j^{\bar{a}} v^{\bar{b}} + \rho v^{\bar{a}} v^{\bar{b}}. \end{aligned} \tag{14}$$

Végül a legbonyolultabb a hőáramsűrűség transzformációs szabálya:

$$\begin{aligned} q'^{\bar{a}} &= \frac{\delta_{\bar{b}\bar{c}}}{2} q'^{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} = \frac{\delta_{\bar{b}\bar{c}}}{2} \pi'^{\bar{a}}{}_d \pi'^{\bar{b}}{}_e \pi'^{\bar{c}}{}_f Z^{def} \\ &= \frac{\delta_{\bar{b}\bar{c}}}{2} (\delta^{\bar{a}}_{\bar{d}} - u'^a \tau_d)(\delta^{\bar{b}}_{\bar{e}} - u'^b \tau_e)(\delta^{\bar{c}}_{\bar{f}} - u'^c \tau_f) \left(\left(\rho u^e u^f + p^{\bar{e}} u^f + u^e p^{\bar{f}} + e^{\bar{e}\bar{f}}\right) u^d + \right. \\ &\qquad \left. \left(j^{\bar{d}} u^e u^f + P^{\bar{d}\bar{e}} u^f + P^{\bar{d}\bar{f}} u^e + q^{\bar{d}\bar{e}\bar{f}}\right)\right) \\ &= q^{\bar{a}} + (e + p_{\bar{b}} v^{\bar{b}} + \frac{\rho}{2} v_{\bar{b}} v^{\bar{b}}) v^{\bar{a}} + P^{\bar{a}\bar{b}} v_{\bar{b}} + j^{\bar{a}} \frac{v^{\bar{b}} v_{\bar{b}}}{2}. \end{aligned} \tag{15}$$

A hagyományos 3-as indexes jelölésekkel összefoglalva a transzformációs szabályokat:

$$\rho' = \rho, \tag{16}$$

$$p'^i = p^i + \rho v^i, \tag{17}$$

$$j'^i = j^i + \rho v^i, \tag{18}$$

$$e' = e + p_i v^i + \frac{\rho}{2} v^2, \tag{19}$$

$$P'^{ik} = P^{ik} + \rho v^i v^k + p^k v^i + j^i v^k, \tag{20}$$

$$q'^i = q^i + v^i \left(e + p_k v^k + \frac{\rho}{2} v^2\right) + P^{ik} v_k + j^i \frac{v^2}{2}, \tag{21}$$

Az abszolút tárgyalásban két újszerű fizikai mennyiség bukkant fel. Az egyik a tömeg nem konvektív áramsűrűsége, az (ön)diffúziós áramnak nevezett $j^{\bar{a}}$. A másik a $p^{\bar{a}}$ lendületsűrűség. Szerepük részletesebb elemzéséhez fel kell írnunk a folyadék abszolút és relatív mérlegeit.

4. Az egy komponensű folyadékok alapmérlege és komponensei

A tömeg-lendület-energia tenzor divergenciájából vezethetjük le a hagyományosan három külön egyenletként jelentkező alapmérlegek rendszerét. Az abszolút forma:

$$\begin{aligned}\partial_a Z^{abc} &= \partial_a\left(z^{bc}u^a + z^{\bar a bc}\right) = \dot z^{bc} + z^{bc}\partial_a u^a + \partial_a z^{\bar a bc}\\ &= (\dot\rho u^c + \rho\dot u^c + \dot p^{\bar c})u^b + (\rho\dot u^b + \dot p^{\bar b})u^c + p^{\bar b}\dot u^c + p^{\bar c}\dot u^b + \dot e^{\bar b\bar c} +\\ &\left(\rho u^b u^c + p^{\bar b}u^c + u^b p^{\bar c} + e^{\bar b\bar c}\right)\partial_a u^a + u^b u^c\partial_a j^{\bar a} + j^{\bar a}u^c\partial_a u^b + j^{\bar a}u^b\partial_a u^c +\\ &P^{\bar a\bar b}\partial_a u^c + u^c\partial_a P^{\bar a\bar b} + P^{\bar a\bar c}\partial_a u^b + u^b\partial_a P^{\bar a\bar c} + \partial_a q^{\bar a\bar b\bar c} = 0^{bc}.\end{aligned} \tag{22}$$

Emlékeztetünk, a felülpontozás az u-időderiváltat jelöli: $u^a\partial_a(\ ) = D_u(\ ) = \dot{(\ )}$. A (22) tömeg-lendület-energiamérleg időszerű része a tömeg-lendületmérleg:

$$\tau_c\partial_a Z^{abc} = \dot\rho u^b + \rho\dot u^b + \dot p^{\bar b} + (\rho u^b + p^{\bar b})\partial_a u^a + u^a\partial_a j^{\bar a} + j^{\bar a}\partial_a u^b + \partial_a P^{\bar a\bar b} = 0^b. \tag{23}$$

A tömeg-lendületmérleg időszerű része pedig a tömegmérleg:

$$\tau_b\tau_c\partial_a Z^{abc} = \dot\rho + \rho\partial_a u^a + \partial_a j^{\bar a} = 0, \tag{24}$$

illetve u-térszerű része a lendületmérleg:

$$\pi^{\bar b}{}_d\tau_c\partial_a Z^{adc} = \rho\dot u^b + \dot p^{\bar b} + p^{\bar b}\partial_a u^a + j^{\bar a}\partial_a u^b + \partial_a P^{\bar a\bar b} = 0^{\bar b}. \tag{25}$$

Az energia mérlege a tömeg-lendület-energiamérleg u-tér-térszerű része, illetve annak nyoma:

$$\begin{aligned}\frac{\delta_{\bar b\bar c}}{2}\pi^{\bar b}{}_d\pi^{\bar c}{}_e\partial_a Z^{ade} &= \frac{\delta_{\bar b\bar c}}{2}\left(\dot e^{\bar b\bar c} + e^{\bar b\bar c}\partial_a u^a + p^{\bar b}\dot u^c + p^{\bar c}\dot u^b + P^{\bar a\bar b}\partial_a u^c + P^{\bar a\bar c}\partial_a u^b + \partial_a q^{\bar a\bar b\bar c}\right)\\ &= \dot e + e\partial_a u^a + p^{\bar b}\dot u_b + P^{\bar a}_{\ \bar b}\partial_a u^b + \partial_a q^{\bar a} = 0.\end{aligned} \tag{26}$$

Az u^a sebességű közeg u-széthasított formájú (24), (25) és (26) mérlegeiben az u'^a inerciális megfigyelő közeghez képesti $v^{\bar a} = u^a - u'^a$ relatív sebességét alkalmazva kapjuk a szubsztanciális mérlegeket. A hagyományos 3-as indexes jelöléssel írva:

$$\dot\rho + \rho\partial_i v^i + \underline{\partial_i j^i} = 0, \tag{27}$$

$$\underline{\dot p^i + p^k\partial_k v^k} + \rho\dot v^i + \underline{j^k\partial_k v^i} + \partial_k P^{ki} = 0^i, \tag{28}$$

$$\dot e + e\partial_i v^i + \partial_i q^i + \underline{p_i\dot v^i} + P^{ik}\partial_i v_k = 0. \tag{29}$$

Ezek a tömeg, a lendület és az energia relatív mérlegei. Ugyanezt kapjuk, ha a fenti (16) transzformációs szabályokkal u'^a inerciális megfigyelő által idő és térszerű részekre hasított lokális mérlegekben az u'-mennyiségeket u-mennyiségekre cseréljük. A szokásosan felírt mérlegektől az újonnan fellépő j^i (ön)diffúziós áramot és a p^i lendületsűrűséget tartalmazó (aláhúzott) tagokban különböznek, ami azt mutatja, hogy a $P^{\bar a\bar b}$ nyomástenzorra és a $q^{\bar a}$ hőáramsűrűségre vonatkozó megszokott konstitutív függvények mellett további fizikai feltételeket kell megadnunk az egyenletek lezárásához. Ehhez a lezáráshoz és annak eldöntéséhez, hogy a korábban bevezetett u^a sebesség milyen értelemben lesz a folyadék sebessége, meg kell vizsgálnunk hogy vajon a folyadékok termodinamikája mennyire lehet független a vonatkoztatási rendszerektől.

5. A mozgás termosztatikája, avagy termosztatodinamika

A szakasz címe önellentmondónak látszik, ugyanakkor jól mutatja a mozgást is tartalmazó ’termosztatika’ paradigmatikus dilemmáját. A termodinamika irodalmában fel sem merül, hogy a sebesség állapothatározó lehetne. A kontinuumokkal kapcsolatos szokásos vizsgálatokban ez a lehetőség kimondottan tiltott, transzformációs megfontolások miatt. Azonban Galilei-relativisztikus szemszögből nézve ezek a megfontolások hibásak [44] és a kérdés pontosan megvizsgálható.

5.1. Abszolút relációk. Kiindulópontként tudnunk kell, hogy a klasszikus "egyensúlyi" termodinamika, azaz a termosztatika, valójában nemegyensúlyi és időfüggő [1]. Másrészről érdemes figyelembe venni a relativisztikus kinetikus elméletben levezetett/beépített termodinamikai hátteret, esetleg egyből a szokásos kereteket meghaladó módon [75, 76].

Ezek fényében termodinamikai alapfeltevésünk tulajdonképpen teljesen megszokott, csak téridő szempontból kifejtve. Az entrópiasűrűség négyesvektormező lesz, amelynek a közegre vonatkozóan nézve van sűrűsége és árama is, $S^a = su^a + s^{\bar{a}}$. Ennek hagyományos skalár sűrűsége az extenzívek sűrűségeitől függ, vagyis a (8)-ban bevezetett szimmetrikus másodrendű tömeg-lendület-energiasűrűség tenzor függvénye: $s = s(z^{bc})$. Ez az összefüggés nem függ sem a közeg sebességmezőjétől, sem megfigyelőtől, mert mind az s entrópiasűrűség, mind a z^{bc} tömeg-lendület-energiasűrűség tenzor abszolút. Deriváltja a termodinamikai intenzív mennyiségek szimmetrikus másodrendű kotenzora, amit a továbbiakban *kémiai potenciál-termosebesség-hőmérséklet kotenzornak* nevezünk és Y_{bc}-vel jelölünk. Tehát $\frac{ds}{dz^{bc}} = Y_{bc}$. Ezt a deriválást termodinamikai szokás szerint *Gibbs-relációnak* hívjuk és differenciálokkal jelöljük:

$$ds = Y_{bc} dz^{bc}. \tag{30}$$

Részletes tanulmányozásához megadjuk az intenzív mennyiségek abszolút kotenzorának a közeg u^a sebességmezője által széthasításával kapott komponenseit (lásd (82) az A függelékben):

$$Y_{bc} = Y_b\tau_c + Y_{b\bar{e}}{\pi_c}^{\bar{e}} = (y\tau_b + y_{\bar{d}}{\pi_b}^{\bar{d}})\tau_c + (y_{\bar{e}}\tau_b + y_{\bar{d}\bar{e}}{\pi_b}^{\bar{d}}){\pi_c}^{\bar{e}}. \tag{31}$$

Ha a z^{bc} tenzort is a (7) szerinti széthasított formában tekintjük, akkor

- y a sűrűséghez konjugált intenzív fizikai mennyiség,
- $y_{\bar{b}}$ a $p^{\bar{b}}$ lendületsűrűséghez konjugált intenzív mennyiség,
- $y_{\bar{b}\bar{c}}$ az $e^{\bar{b}\bar{c}}$ energiasűrűség tenzorhoz konjugált intenzív mennyiség.

A továbbiakban azzal az alapvető feltételezéssel élünk, hogy

$$y_{\bar{b}\bar{c}} = \frac{\beta}{2}\delta_{\bar{b}\bar{c}} \tag{32}$$

Ekkor

$${y_{\bar{b}}}^{\bar{b}} = \delta^{\bar{b}\bar{c}} y_{\bar{b}\bar{c}} = \frac{3}{2}\beta. \tag{33}$$

Ezután az egyes fizikai mennyiségek a következőek:

[1] Akit az ezzel kapcsolatos a szokásos félreértések és összemosások zavarnak, mindenképpen olvassa el Matolcsi Tamás nagyszerű könyvét angolul, vagy könnyedebb verzióját magyarul [73, 74].

– β a *reciprok hőmérsékletet*,

$$\beta = \frac{1}{T} = \frac{1}{6}\delta^{\bar{b}\bar{c}}\delta_{\bar{c}}{}^{e}\delta_{\bar{b}}{}^{d}Y_{de} = \frac{2}{3}y_{\bar{b}}{}^{\bar{b}}. \tag{34}$$

– A μ *kémiai potenciál* a sűrűséghez tartozó entrópikus intenzívként adódik:

$$\mu = -Tu^b u^c Y_{bc} = -Ty. \tag{35}$$

– A lendületsűrűséghez tartozó intenzív mennyiségből definiáljuk a *termosebességet*:

$$w_{\bar{b}} = -2Tu^c\delta_{\bar{b}}{}^{d}Y_{dc} = -2Ty_{\bar{b}}. \tag{36}$$

A Gibbs-reláció u-széthasított formája ezek után a következőképpen számolható:

$$\begin{aligned}
&ds = Y_{bc}dz^{bc} = \\
&-\beta\left(\mu\tau_b\tau_c + \frac{1}{2}(w_{\bar{d}}\pi_b{}^{\bar{d}}\tau_c + w_{\bar{e}}\pi_c{}^{\bar{e}}\tau_b) - \frac{1}{2}y_{\bar{d}\bar{e}}\pi_b{}^{\bar{d}}\pi_c{}^{\bar{e}}\right)\times \\
&\qquad\left(u^bu^cd\rho + \rho u^cdu^b + \rho u^bdu^c + u^cdp^{\bar{b}} + p^{\bar{b}}du^c + u^bdp^{\bar{c}} + p^{\bar{c}}du^b + de^{\bar{b}\bar{c}}\right) \\
&\quad = -\beta\left(\mu d\rho + \rho w_{\bar{b}}du^b + w_{\bar{b}}dp^{\bar{b}} - p_{\bar{b}}du^b - de\right)
\end{aligned} \tag{37}$$

Tehát az abszolút Gibbs-reláció u-széthasított mennyiségekkel felírva végül az alábbi formát ölti:

$$de = Tds + \mu d\rho + w_{\bar{a}}dp^{\bar{a}} + (\rho w_{\bar{a}} - p_{\bar{a}})du^a. \tag{38}$$

A fenti formula analóg a relativisztikus esetben a kinetikus kompatibilitás figyelembe vételével kapott alakkal [75, 76, 77], azzal a különbséggel, hogy itt az utolsó tagban a sűrűség szerepel, relativisztikusan pedig az entalpia.

Képezhetjük a négyes entrópiasűrűség Legendre-transzformáltját, bevezetve az $\tilde{S}^a$ konjugált entrópiát:

$$S^a - Y_{bc}Z^{abc} = \tilde{S}^a. \tag{39}$$

Adjuk meg $\tilde{S}^a$-nak a közeg u^a négyessebességével való széthasított formáját a célszerű

$$\tilde{S}^a = \beta p(u^a + r^{\bar{a}}), \tag{40}$$

alakban, ahol $\tau_a r^{\bar{a}} = 0$. Ekkor (39) vektoregyenlet abszolút időszerű részét, az *extenzivitási relációt*, a kifejezés τ_a-val történő szorzásával kapjuk:

$$s + \beta\mu\rho + \beta w_{\bar{b}}p^{\bar{b}} - \beta e = \beta p. \tag{41}$$

Ez a forma mutatja, hogy p a termosztatodinamikai (termosztatikai) nyomás. Az u-térszerű rész, az entrópiaáram kifejezése, a $\pi_b^{\bar{a}}$ u-projekcióval adódik:

$$s^{\bar{a}} + \beta\mu j^{\bar{a}} + \beta P^{\bar{a}\bar{b}}w_{\bar{b}} - \beta q^{\bar{a}} = \beta pr^{\bar{a}}. \tag{42}$$

A (41) extenzivitási reláció és a (38) Gibbs-reláció következményeként kapjuk a *Gibbs–Duhem-relációt*:

$$\beta dp = -hd\beta + \rho d(\beta\mu) + p^{\bar{a}}d(\beta w_{\bar{a}}) - \beta(\rho w_{\bar{a}} - p_{\bar{a}})du^a, \tag{43}$$

ahol $h = e + p$.

5.2. Állapotegyenlet. A (38) u-széthasított mennyiségekkel felírt abszolút Gibbs–reláció alakjából látszik, hogy minden mennyiség az (s, ρ, p^a, u^a) függvénye. A belső energia második parciális deriváltjaiból adódik itt a következő Maxwell-reláció:

$$\frac{\partial w_{\bar{a}}}{\partial u^b} = \frac{\partial^2 e}{\partial u^b \partial p^{\bar{a}}} = \frac{\partial^2 e}{\partial p^{\bar{b}} \partial u^a} = \frac{\partial(\rho w_{\bar{a}} - p_{\bar{a}})}{\partial p^{\bar{b}}}. \tag{44}$$

Ez parciális differenciálegyenlet $w^{\bar{a}}$-ra, amelynek általános megoldása

$$w_{\bar{a}} = \frac{p_{\bar{a}}}{\rho} + A_{\bar{a}\bar{c}} \left(u^c - \hat{u}^c + \frac{p^{\bar{c}}}{\rho} \right), \tag{45}$$

ahol $A_{\bar{a}\bar{c}}(\rho, s)$ és $\hat{u}^c(\rho, s)$ tetszőleges ρ és s függvények, az utóbbi abszolút sebesség. A fenti állapotegyenlet mutatja, hogy a termosebesség csak meghatározott módokon függhet a $p^{\bar{a}}$ lendületsűrűségtől. Különösen egyszerű az állapotegyenlet, ha $A_{\bar{a}\bar{c}} = 0_{\bar{a}\bar{c}}$. Ekkor

$$p_{\bar{a}} = \rho w_{\bar{a}}, \tag{46}$$

amit a továbbiakban *impulzusfeltételnek* nevezünk.

5.3. Termodinamikai összefüggések transzformációs szabályai. Definíciójuk szerint az entrópia sűrűsége és áramsűrűsége egy vektor időszerű és térszerű komponense, ezért egy u'^a négyes sebességű megfigyelő szerinti idő- és térszerű komponenseit az eddigiek szerint is vesszővel jelölve, a $v^{\bar{a}} = u^a - u'^a$ relatív sebességgel a transzformációs szabály

$$s' = s, \qquad s'^i = s^i + s v^i. \tag{47}$$

A négyesvektorokra vonatkozó (88) transzformációs szabályok és $\tilde{S}^a$ (40) felbontása alapján adódik, hogy

$$p' = p \qquad \text{és} \qquad r'^i = r^i + v^i. \tag{48}$$

Az entrópia deriváltjaként bevezetett intenzív mennyiségek az Y_{ab} abszolút másodrendű kotenzor komponensei, ezért a B függelék (107) egyenlete alapján kapjuk a következő transzformációs szabályokat:

$$\beta' = \beta, \tag{49}$$

$$w'^i = w^i + v^i, \tag{50}$$

$$\mu' = \mu - w_i v^i - \frac{v^2}{2}. \tag{51}$$

Érdemes a termosebességet kicsit részletesebben is megvizsgálni. A másodrendű kotenzorok $y_{\bar{a}b} = \delta_{\bar{a}}{}^c Y_{cb} = y_{\bar{a}} \tau_b + y_{\bar{a}\bar{c}} \pi_b{}^c$ térszerű komponense abszolút. Ennek u'-időszerű komponense

$$y'_{\bar{a}} = y_{\bar{a}b} u'^b = y_{\bar{a}} + y_{\bar{a}\bar{c}}(u'^c - u^c), \tag{52}$$

ebből pedig (32) és (36) felhasználásával azt kapjuk a termosebességekre, hogy:

$$w'_{\bar{a}} = w_{\bar{a}} - \delta_{\bar{a}\bar{c}}(u'^c - u^c) = w_{\bar{a}} + v_{\bar{a}}, \tag{53}$$

Végül a relatív indexek használatával az (50) transzformációs szabály adódik.

Az extenzivitási reláció abszolút és ezért Galilei-invariáns, hiszen egy négyesvektor-egyenlet abszolút időszerű része:

$$e' + p - Ts - \mu'\rho - w'_i p'^i = e + p - Ts - \mu\rho - w_i p^i = 0. \tag{54}$$

Ezt közvetlenül is ellenőrizhetjük, felhasználva az eddig levezetett transzformációs szabályokat. Ugyanígy egyszerűen látható, hogy az entrópiaáram-sűrűség térvektorként transzformálódik:

$$s'^i = \beta(q'^i - \mu' j'^i - P'^{ij} w'_j + pr'^i) = \beta(q^i - \mu j^i - P^{ij} w_j + pr^i) + sv^i = s^i + sv^i, \tag{55}$$

ahol felhasználtuk β, q^i, μ, j^i, P^{ij}, w_i, p és r^i előzőekben levezetett transzformációs szabályait.

Végül, a (38) Gibbs-reláció is Galilei-invariáns, hiszen egy kotenzornak egy tenzordifferenciálon való hatásaként kaptuk, tehát

$$de - Tds - \mu d\rho - w_i dp^i - (\rho w_i - p_i)dv^i = de' - Tds - \mu' d\rho - w'_i dp'^i - (\rho w'_i - p'_i)d\hat{v}^i, \tag{56}$$

ahol $v^{\bar{a}} = u^a - u'^a$ és $\hat{v}^{\bar{a}} = u^a - u''^a$ a közegnek az u' és u'' állandó sebességű inerciális megfigyelőkre vonatkoztatott relatív sebességei. A Gibbs-reláció utolsó tagja külön is Galilei-invariáns, hasonlóan a Tds taghoz, mert $\rho w_i - p_i = \rho w'_i - p'_i$ és $dv^i = d\hat{v}^i$.

6. Abszolút entrópiamérleg

Az abszolút termodinamikai feltételekből következő (38) Gibbs-reláció és (42) entrópiaáram megadják, hogy adott entrópiasűrűség és u-entrópiaáram hogyan függ a megfelelő termodinamikai intenzív állapotjelzőktől. Így ki tudjuk fejezni az abszolút entrópiaprodukciót az u-hasított mennyiségekkel:

$$\begin{aligned}\partial_a S^a = \dot{s} + s\partial_a u^a + \partial_a s^{\bar{a}} = \\ \beta\dot{e} - \beta\mu\dot{\rho} - \beta w_{\bar{a}}\dot{p}^{\bar{a}} + \beta(p_{\bar{a}} - \rho w_{\bar{a}})\dot{u}^a + s\partial_a u^a + \\ \partial_a\left(\beta q^{\bar{a}} - \beta\mu j^{\bar{a}} - \beta P^{\bar{a}\bar{b}} w_{\bar{b}} + \beta p r^{\bar{a}}\right),\end{aligned} \tag{57}$$

amelytől természetesen azt követeljük meg, hogy legyen nemnegatív.

Behelyettesítve a (24), (25) és (26) tömeg, lendület és energiamérlegeket, felhasználva az (43) Gibbs-Duhem relációt azt kapjuk, hogy

$$
\begin{aligned}
\partial_a S^a = &(s - \beta e + \beta\mu\rho + \beta w_{\bar{a}} p^{\bar{a}})\partial_a u^a + q^{\bar{a}}\partial_a\beta - j^{\bar{a}}\partial_a(\beta\mu) - \\
&\beta P^{\bar{a}}{}_{\bar{b}}\partial_a(u^b + w_{\bar{b}}) + \beta w_{\bar{a}} j^{\bar{b}}\partial_b u^a - P^{\bar{a}\bar{b}} w_{\bar{b}}\partial_{\bar{a}}\beta + \beta p\partial_a r^{\bar{a}} + r^{\bar{a}}\partial_a(\beta p) = \\
&(\rho r^{\bar{a}} - j^{\bar{a}})\left(\partial_a(\beta\mu) - \beta w_{\bar{b}}\partial_a u^b\ \right) + \\
&\quad\left(q^{\bar{a}} - h r^{\bar{a}} - (P^{\bar{a}\bar{b}} - r^{\bar{a}} p^{\bar{b}})w_{\bar{b}} + p r^a\right)\partial_a\beta - \\
&\quad\beta\left(P^{\bar{a}}_{\bar{b}} - r^{\bar{a}} p_{\bar{b}} - p\delta^{\bar{a}}{}_{\bar{b}}\right)\partial_a(u^b + w^{\bar{b}}) + \beta p\partial_a(r^{\bar{a}} - w^{\bar{a}}) = \\
&(\rho r^{\bar{a}} - j^{\bar{a}})\,\partial_a\left(\beta\left(\mu + \frac{w^2}{2}\right)\right) + \\
&\quad\left(q^{\bar{a}} - e r^{\bar{a}} - (P^{\bar{a}\bar{b}} - r^{\bar{a}} p^{\bar{b}})w_{\bar{b}} - (\rho r^{\bar{a}} - j^{\bar{a}})\frac{w^2}{2}\right)\partial_a\beta - \\
&\quad\beta\left(P^{\bar{a}}{}_{\bar{b}} - j^{\bar{a}} w_{\bar{b}} - r^{\bar{a}}(p_{\bar{b}} - \rho w_{\bar{b}}) - p\delta^{\bar{a}}{}_{\bar{b}}\right)\partial(u^b + w^{\bar{b}}) + \beta p\partial_a(r^{\bar{a}} - w^{\bar{a}}) \geq 0.
\end{aligned}
\tag{58}
$$

A fenti egyenlőtlenség a Galilei-relativisztikus folyadékok abszolút entrópiaprodukciója. Az elvárt módon kvadratikus kifejezés első tagja az anyagáramlásra vonatkozik, a $j^{\bar{a}}$ (ön)diffúziós áramsűrűség a konstitutív mennyiség benne. A szorzat másik felében pedig a szokásos termodinamikai erőt, a kémiai potenciál gradiensét figyelhetjük meg. A második tag a termikus eredetű entrópiaprodukció, ahol a $q^{\bar{a}}$ hőáramsűrűség a konstitutív mennyiség és a reciprok hőmérséklet gradiense, $\partial_a\beta$ a termodinamikai erő. Végül a harmadik tag a mechanikai eredetű disszipációval azonosítható, benne a $P^{\bar{a}\bar{b}}$ nyomástenzorral, mint konstitutív mennyiséggel és a sebesség gradiensével mint termodinamikai erővel. Pontosabban a viszkozitás szempontjából releváns sebesség a közeg u^a négyes sebességének és a $w^{\bar{a}}$ termosebességnek az összege. Figyeljük meg, hogy u^a expliciten csak itt, a mechanikai disszipációt leíró részben, a sebességgradiensben szerepel. A negyedik tag új, benne az $r^{\bar{a}}$ tekinthető konstitutív mennyiségnek.

Az abszolút entrópiaprodukció egyenlőtlensége tehát megoldható, a kvadratikus forma minden tagjában vannak konstitutív mennyiségek. Emiatt bevezethetőek termodinamikai erők és áramok, és közöttük a szokott lineáris kapcsolat feltételezve kapjuk az egyenlőtlenség megoldását, az együtthatók előjeleit megfelelően választva. Azonban a termodinamikai feltételek önmagukban nem zárják le a mérlegek rendszerét, összeszámolva az alapváltozókat a közeg impulzusára vagy a közeg sebességére vonatkozóan nincs egyenletünk, illetve valamit mondani kellene a termosebességről is. Vegyük észre továbbá, hogy eddig még nem adtuk meg, u^a milyen fizikai értelemben a közeg sebességmezője.

7. Mi a folyadék sebessége?

Az entrópiaprodukció utolsó tagját nullának vesszük, azaz a konjugált entrópiavektor térszerű részét párhuzamosnak választjuk a termosebességgel, a relativisztikus kinetikus elmélettel összhangban. Ekkor könnyen értelmezhető formulákat kaphatunk.[2] Tegyük fel tehát, hogy

$$r^{\bar{a}} = w^{\bar{a}}. \tag{59}$$

Ekkor a fenti entrópiaprodukció a következő alakúra egyszerűsödik:

$$\begin{aligned}\partial_a S^a = (\rho w^{\bar{a}} - j^{\bar{a}})\,\partial_a\left(\beta\left(\mu + \frac{w^2}{2}\right)\right) + \\ \left(q^{\bar{a}} - w^{\bar{a}}(e - p^{\bar{b}} w_{\bar{b}}) - (\rho w^{\bar{a}} - j^{\bar{a}})\frac{w^2}{2} - P^{\bar{a}\bar{b}} w_{\bar{b}}\right)\partial_a\beta - \\ \beta\left(P^{\bar{a}}{}_{\bar{b}} - j^{\bar{a}} w_{\bar{b}} - w^{\bar{a}}(p_{\bar{b}} - \rho w_{\bar{b}}) - p\delta^{\bar{a}}{}_{\bar{b}}\right)\partial_a(u^b + w^{\bar{b}}) \geq 0.\end{aligned} \tag{60}$$

Hogyan zárjuk le az egyszerű folyadékok mozgásegyenleteit, azaz hogyan tehető az egyenletek száma az ismeretlenek számával egyenlővé? Vagyis mi a konstitutív elmélet? Vegyük észre, hogy az (60) entrópiaprodukció szokásos lineáris megoldásából kapott három összefüggés még mindig nem elég az egyenletrendszer lezárásához, hiszen az alapváltozóink megszokott rendszere, azaz a sűrűség, belső energia és a folyadék sebessége mellett két további mezőt kellene megadnunk: a folyadék $p^{\bar{a}}$ lendületsűrűségét és a termosebességet, $w^{\bar{a}}$-t. Viszont két további lehetőségünk is van, hogy lezárjuk a konstitutív elméletet. Egyrészt $w^{\bar{a}}$-ra termodinamikai állapotegyenlet vonatkozik. Másrészt pedig eddig nem rögzítettük, hogy mit is értünk a közeg, azaz a folyadék négyessebessége alatt. A folyadék sebességének rögzítését *áramlásválasztásnak* nevezzük.

Az áramlásválasztás során az eddig határozatlan u^a sebességmezőt rögzíthetjük például a folyadék egy tetszőleges extenzív tulajdonságához: a tömeghez ($j^{\bar{a}} = 0$), energiához ($q^{\bar{a}} = 0$) vagy lendülethez ($p^{\bar{a}} = 0$), de bonyolultabb módon is. Ezek után a relatív sebesség már a folyadék tömegének, energiájának, illetve lendületének áramlását jellemzi a külső megfigyelőhöz képest. Bonyolultabb áramlásokra példa tiszta anyagi (tömeg) és energiaáram keveréke [77]. Az egyes esetek azonban gyakorlati szempontból nem egyenértékűek. Az entrópiaprodukció fenti formája azt sugallja, hogy az áramlásválasztások közül különösen egyszerű konstitutív függvényeket kapunk, ha az áramlást úgy határozzuk meg, azaz úgy választjuk a folyadék négyessebességét, hogy $w^{\bar{a}} = 0$ teljesüljön. Ezt a választást nevezzük *termoáramlásnak.*

Az entrópiaprodukció egyszerű formája ezek után:

$$\partial_a S^a = -j^{\bar{a}}\partial_a\frac{\mu}{T} + q^{\bar{a}}\partial_a\frac{1}{T} - \frac{1}{T}\left(P^{\bar{a}}{}_{\bar{b}} - p\delta^{\bar{a}}{}_{\bar{b}}\right)\partial_a u^b \geq 0. \tag{61}$$

Ha (45) állapotegyenlet egyszerű változatát tekintjük, a (46) impulzusfeltételt, akkor $w^{\bar{a}} = 0^{\bar{a}}$ következménye $p^{\bar{a}} = 0^{\bar{a}}$. Tehát ilyen állapotegyenlet esetén a termoáramlás szükségszerűen egyúttal *lendületáramlás* is.

A termo- illetve lendületáramlással definiált közeget nevezzük *klasszikus folyadéknak.* A (27), (28) és (29) szubsztanciális tömeg-, lendület- és energiamérlegek

[2]Lehet, itt is van valami fizika, de azt itt most nem vizsgáljuk.

egyszerűsödnek:

$$\dot{\rho} + \rho\partial_i v^i + \partial_i j^i = 0 \tag{62}$$

$$\rho\dot{v}^i + j^k\partial_k v^i + \partial_k P^{ki} = 0^i, \tag{63}$$

$$\dot{e} + e\partial_i v^i + \partial_i q^i + P^{ik}\partial_i v_k = 0, \tag{64}$$

és persze az entrópiaprodukció

$$\partial_a S^a = -j^i\partial_i\frac{\mu}{T} + q^i\partial_i\frac{1}{T} - \frac{1}{T}\left(P^{ij} - p\delta^{ij}\right)\partial_i v_j \geq 0. \tag{65}$$

Klasszikus folyadékra a (38) a közeg sebességétől függő Gibbs-reláció a szokásos

$$de = Tds + \mu d\rho \tag{66}$$

formát ölti. Az inerciális megfigyelő esetéhez azt kell észrevennünk, hogy a transzformációs szabályok szerint most $w'_i = v_i$ és $p'^i = \rho v^i$ áll fenn, ezért $\rho w'^i - p'^i = 0$, és így (56) a

$$de' = Tds + \mu' d\rho + v_i d(\rho v^i) \tag{67}$$

összefüggésbe megy át. Teljesen hasonlóan, a (41) extenzivitási reláció,

$$e' + p = Ts + \mu'\rho + \rho v^2 \tag{68}$$

átírható

$$e + p = Ts + \mu\rho \tag{69}$$

alakba. Ezek a formulák is mutatják, hogy klasszikus folyadékokra a szokásos teljes energiasűrűség az inerciális u' megfigyelő e' energiasűrűsége, e pedig a közeg belső energiasűrűsége és (6) a transzformációs szabály. Ennek alapján a kémiai potenciál $\mu' = \mu - \frac{v^2}{2}$ transzformációs szabályában μ' a teljes, μ pedig a *belső kémiai potenciál*. Az extenzivitási relációban a mozgási energiát a nyomáshoz szokták sorolni a kémiai potenciál helyett. A folyadékmechanikában Bernoulli-egyenletként jelenik meg az extenzivitási reláció és benne a dinamikus nyomás (a torlónyomás és statikus nyomás különbsége).

Az entrópia (42) áramsűrűségének klasszikus folyadékokra vonatkozó u'-formája adja a *teljes entrópiaáramsűrűséget*:

$$s'^i = \frac{1}{T}\left(q'^i - \mu' j'^i - P'^{ik}v_k + pv^i\right), \tag{70}$$

illetve az u-forma a *belső entrópiaáramsűrűséget*:

$$s^i = \frac{1}{T}\left(q^i - \mu j^i\right), \tag{71}$$

Az (62)-(64), (66), (69) és (71) mérlegek és termodinamikai összefüggések alapján az entrópiaprodukció ebben a speciális esetben közvetlenül számolható, és pontosan (65) lesz. Ennek megfelelően a 7. táblázatban megadott termodinamikai erőket és áramokat azonosíthatjuk.

	Diffúziós	Termikus	Mechanikai
Erő	$-\partial_i \frac{\mu}{T}$	$\partial_i \frac{1}{T}$	$\partial_i v_j$
Áram	j^i	q^i	$-\frac{1}{T}\left(P^{ij} - p\delta^{ij}\right)$

1. táblázat. Termodinamikai erők és áramok

Lineáris összefüggést feltételezve, izotrop folyadékra azt kapjuk, hogy

$$j^i = -\xi \partial_i \frac{\mu}{T} + \chi_1 \partial_i \frac{1}{T}, \tag{72}$$

$$q^i = -\chi_2 \partial_i \frac{\mu}{T} + \lambda \partial_i \frac{1}{T}, \tag{73}$$

$$P^{ij} = p\delta^{ij} - \eta_v \partial_k v^k \delta^{ij} - \eta \left(\partial^i v^k + \partial_k v^i - \frac{2}{3} \partial_k v^k \delta^{ij} \right). \tag{74}$$

Itt ξ az (ön)diffúziós együttható, χ_1 és χ_2 a Soret–Dufour-együtthatók, λ a termodinamikai hővezetési együttható $\lambda_F = T^2 \lambda$ a Fourier-féle hővezetési együttható, η_v és η a térfogati és nyíró viszkozitás.

Az alapmérlegek klasszikus folyadékokra vonatkozó (62)-(64) rendszere, együtt a (72), (73) és (74) konstitutív összefüggésekkel zárt és az (ön)diffúziós áramsűrűség kivételével azonos a szokásos kontinuitás-Fourier-Navier-Stokes egyenletrendszerrel. Levezetésünk mutatja, hogy az öndiffúziós áramsűrűség nem küszöbölhető ki áramlásválasztással, elhagyása fizikai feltételt jelent.

8. Összefoglalás

Ebben a munkában megmutattuk, hogy a nemrelativisztikus, azaz Galilei-relativisztikus, egykomponensű disszipatív folyadékok hogyan tárgyalhatóak a vonatkoztatási rendszertől függetlenül és milyen feltételekkel kaphatjuk meg a leírásukra általában használt vonatkoztatási rendszertől függő, relatív kontinuitás-Fourier-Navier-Stokes egyenletrendszert. A vonatkoztatási rendszer függetlenséget a Matolcsi-féle Galilei-relativisztikus téridőmodell keretei között tárgyaltuk [5, 6], ahol a Galilei-relativisztikus téridő az eredeti Weyl-féle, affin terekre alapozott koncepció pontos matematikai megfogalmazása. Tárgyalásunk vektortereket használ, és absztrakt indexes formalizmusra alapozott egyszerű számítási módszert vezet be.

Megkövetelve, hogy a speciális relativitáselmélethez hasonlóan az energiasűrűség egy abszolút fizikai mennyiség komponenseként adódjon, illetve, hogy a kinetikus elmélet momentum sorfejtésével is összhangban legyen a fizikai alapmennyiség egy két indexében szimmetrikus harmadrendű négyestenzornak adódik. Ezt neveztük a közet tömeg-lendület-energia tenzorának. Ennek a négyesdivergenciája egy másodrendű négyestenzoregyenlet, amely egyszerre a folyadék tömeg-, energia- és lendületmérlege abszolút módon, vonatkoztatási rendszertől függetlenül. Egy négyessebességmező segítségével kapjuk a tömegmérleget ennek idő-időszerű komponenseként, az impulzusmérleget pedig idő-térszerű részeként (illetve a szimmetria miatt tér-időszerű részként is). Az energiamérleg pedig az abszolút mérleg tér-térszerű részének, amely egy másodrendű hármastenzor egyenlet, a nyoma.

Az abszolút tárgyalásból levezettük a relatív fizikai mennyiségek és a mérlegek transzformációs szabályait. Az elmélet egyik következménye, hogy a belső energia, kinetikus energia és a teljes energia közti szokásos kapcsolat is egy transzformációs szabály. A kinetikus energia tartalmazza a folyadék lendületsűrűségét, amely általában nem köthető valamely relatív sebességhez. Nincs abszolút energia, de az energia egy abszolút mennyiség meghatározott része. A kapott (19) transzformációs szabály általánosabb, mint a szokásos (6) összefüggés a teljes, belső és kinetikus energia között, mert tartalmazza a lendületsűrűséget is. Emiatt, (6)-el ellentétben, (19) tranzitív.

A termodinamika bevezetésekor annyit feltételeztünk, hogy az entrópia négyesvektor időszerű része, az entrópiasűrűség a tömeg-lendület-energia sűrűségtől függ. Ez vonatkoztatási rendszertől és a közeg sebességétől is független, abszolút állítás. Az entrópiasűrűség deriváltja adja az intenzív mennyiségek másodrendű négyestenzorát, a hőmérséklet-termosebesség-kémiai potenciál tenzort, abszolút módon. A mozgási mennyiségeket is tartalmazó Gibbs-relációnak a közeg sebességmezője szerint széthasított formája tartalmazza a lendülethez konjugált intenzív mennyiséget, a termosebességet. A mozgási intenzívekre vonatkozó állapotegyenletek nem függetlenek egymástól. A vegyes parciálisok egyenlősége, a megfelelő Maxwell-reláció állapotegyenletet eredményez a termosebességre voantkozóan.

Mivel az entrópiaáram formája is következmény és levezethető az alapfeltevésekből, az entrópia négyesvektor divergenciáját, az abszolút entrópiaprodukciót ezek után minden további feltétel nélkül számolhatjuk. A folyadék áramlása tetszőlegesen rögzíthető, akár a tömeghez (Eckart-áramlás), akár az energiához (Landau–Lifsic-áramlás), illetve más módokon is.

Az entrópiaprodukció konkrét formája megmutatja, hogy a folyadék mozgását érdemes a termosebességhez kötni. Ekkor termosebességre vonatkozó állapotegyenlet miatt a lendületsűrűség is nulla lesz, azaz a termoáramlás egyúttal lendületáramlás is. Ezzel a feltétellel a vonatkoztatási rendszertől független entrópiaprodukció lényegében a megszokott formát ölti. Az eltérés az öndiffúziós tag jelenléte. Ezt nem lehet megfelelő áramlásválasztással kiküszöbölni úgy, hogy a többi tag szokott formáját megőrizzük. Ha nullának tekintjük, akkor az az anyagra vonatkozó fizikai feltételként interpretálható, vagy megsérti az entrópiaprodukció elvárt függetlenségét a vonatkoztatási rendszertől.

Megjegyzések:

– Ha a Galilei-relativisztikus alapmennyiség harmadrendű vegyes tenzor, ugyanolyan mérlegegyenleteket kapunk, azonos transzformációs szabályokkal. Ekkor az energia és hőmérséklet helyett a tömegsűrűség és a kémiai potenciál reprezentálódik másodrendű hármastenzorként. Ez az alapmennyiség a kovariáns komponensei miatt azonban nem kompatibilis a kinetikus elmélet szokásos momentum-sorfejtésével kapott egyenletrendszerrel.
– Az egyszerű anyagok semleges körülmények közötti stabilitása alapvető az egész fizikában. E nélkül nincs objektív megfigyelés, nem reprodukálhatóak a jelenségek. Ennek az elvnek fizikai-matematikai modellje a termodinamika maga. Az entrópia létezése és növekedése, az egész termodinamikai keretrendszer ezt eredményezi és ezt jelenti [78, 79, 80, 73, 74]. A termodinamika ilyen felfogása egyúttal önellenőrzési lehetőség is. Elvárható, hogy az egyszerű folyadék homogén egyensúlya elszigetelt rendszerben pusztán a

termodinamikai feltételek miatt stabil legyen [81, 63]. A most levezetett folyadékmodell ehhez teljesít egy fontos szükséges feltételt:

Belátható, hogy a kapott (62)-(64), (72)-(74) egyenletrendszer generikusan stabil, azaz a homogén egyensúlya linearisan stabil, ha a termodinamikai stabilitás teljesül (az entrópia konkáv) és a transzportegyütthatók nem negatívak, illetve:

$$\xi \frac{\partial}{\partial \rho}\frac{\mu}{T} - \lambda \frac{\partial}{\partial e}\frac{1}{T} + (\chi_1 + \chi_2)\frac{\partial}{\partial e}\frac{\mu}{T} \geq 0. \tag{75}$$

Itt az első két tag és a harmadik tag együtthatója termodinamikai feltételek miatt nem negatív, egyedül az utolsó tagban szereplő parciális derivált vezethet az egyenlőtlenség sérüléséhez.

– Ennek a munkának a fő motivációját a relativisztikus folyadékok hasonló problémái jelentették [81, 82, 83, 63, 84, 66, 75, 76, 85, 86, 77].

9. A függelék. Galilei-relativisztikus téridő

Itt röviden ismertetésre kerül a Galilei-relativisztikus téridőmodell, amely az alábbi matematikai elemekből áll

(1) Az M *téridő* az $x \in M$ *események* (vagy *villanatok*) négydimenziós irányított affin tere az $x^a \in \mathbb{M}$ *téridővektorok* négydimenziós vektortere felett. Fontos megjegyezni, hogy $\mathbb{M}$-en nincs sem euklidészi, sem pszeudoeuklidészi szerkezet: a téridővektoroknak nincs téridőhossza.
(2) Az I *idő* egydimenziós irányított affin tér a $t \in \mathbb{I}$ időtartamok egydimenziós irányított vektortere felett.
(3) A $\tau : M \to I$ *időkiértékelés* egy affin szürjekció a $\tau_a : \mathbb{M} \to \mathbb{I}$ lineáris leképezés, az *időmúlás* felett.
(4) $\mathbb{D}$ a *távolságok* mértékegyenese, amely egydimenziós irányított vektortér.
(5) A $\delta_{\bar{a}\bar{b}} : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \mathbb{D} \otimes \mathbb{D}$ euklidészi szerkezet egy szimmetrikus bilineáris leképezés, ahol $\mathbb{E} := Ker(\tau) \subset \mathbb{M}$ a *térvektorok* háromdimenziós lineáris altere.

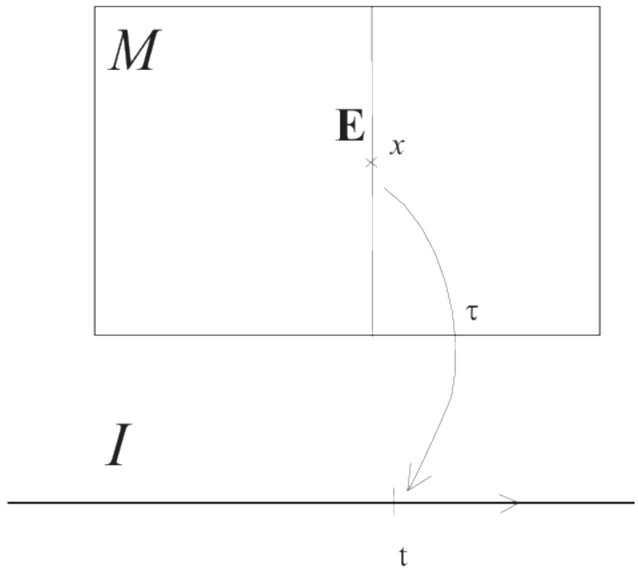
A Galilei-relativisztikus téridő matematikai szerkezetének empirikus megalapozását [87]-ban találjuk. Innen megtudhatjuk, milyen mindennapi tapasztalataink absztrakciójaként állnak össze matematikai elemei.

Az $x, y \in M$ események között *időtartamot* $\tau(x) - \tau(y) = \tau_a x^a$ módon számoljuk, ahol $x^a = x - y$. Két esemény *egyidejű*, ha a közöttük eltelt időtartam nulla. Két egyidejű esemény különbsége *térszerű* vektor, azaz $\mathbb{E}$ eleme.

$\mathbb{M}$ duálisát, azaz az $\mathbb{M} \to \mathbb{R}$ lineáris leképezések vektorterét $\mathbb{M}^*$-al jelöljük. $\mathbb{M}^*$ elemeit a téridőkovektoroknak nevezzük és alsó indexszel jelöljük: $x_a \in \mathbb{M}^*$. Hasonlóképpen $\mathbb{E}$ duálisa $\mathbb{E}^*$, ezek elemeit felülhúzott felső, illetve alsó indexxel jelöljük: $x^{\bar{a}} \in \mathbb{E}$, $x_{\bar{a}} \in \mathbb{E}^*$. Egy $x^{\bar{a}}$ térszerű vektor *hossza* $\|x\| = \sqrt{x^{\bar{a}}\delta_{\bar{a}\bar{b}}x^{\bar{b}}}$.

Az euklidészi szerkezet lehetővé teszi $\mathbb{E}$ és $\mathbb{E}^*$ azonosítását, de ezt nem tehetjük meg $\mathbb{M}$-el és $\mathbb{M}^*$-al, mert nincs rajtuk sem euklidészi, sem pszeudoeuklidészi szerkezet: a téridővektoroknak, ha nem térszerűek, nincs hossza.

A modell legfontosabb elemeit az 1. ábrán mutatjuk be. Láthatjuk, hogy az idő és az időkiértékelés egy fóliázást vezet be a téridőn: az egyidejű események térszerű altereinek egymásutánja hűen modellezi klasszikus időfogalmunkat.



1. ábra. A Galilei-relativisztikus téridő, idő és tér viszonya.

Absztrakt indexes jelölésünkben a, b, c, d, e, f, g indexeket használunk a négydimenziós téridő abszolút fizikai mennyiségeire, $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}, \bar{e}, \bar{f}, \bar{g}$ indexeket a három dimenziós térszerű fizikai mennyiségeire. Ezek az indexek absztraktok abban az értelemben, hogy nem vonatkoznak semmilyen koordináta vagy vonatkoztatási rendszerre, egyszerűen a különféle rendű és típusú tenzoriális mennyiségek egyértelmű jelölését jelentik [70]. A felső index vektori (kontravariáns), az alsó index kovektori (kovariáns) mennyiségeket jelöl. Továbbá i, j, k, l, m-el jelöljük egy inerciális megfigyelőre vonatkozó szokásos háromdimenziós relatív mennyiségek indexeit. Ez fog előfordulni a különféle transzformációs szabályoknál, illetve amikor a hagyományos formulákat értelmezzük. Az ilyen indexek két abszolút sebességmező jelenlétét jelzik, és mindig átírhatóak téridő indexekre. Általában téridőjelöléssel dolgozunk, de ha egy formulában akár egyetlen megfigyelőfüggő mennyiség is van (pl. a relatív sebesség) akkor azt ilyen módon is felírjuk.

A térszerű vektorok $\mathbb{E}$ tere része $\mathbb{M}$-nek, kanonikus beágyazását $\delta^a_{\bar{b}}$-vel jelöljük: ha tehát $x^{\bar{a}} \in \mathbb{E}$, akkor $\delta^a_{\bar{b}} x_{\bar{b}} \in \mathbb{M}$ nem más, mint maga $x^{\bar{a}}$ az $\mathbb{M}$ elemeként.

Ha x_a egy kovektor, azaz egy $x_a : \mathbb{M} \to \mathbb{R}$ lineáris leképezés, akkor annak $\mathbb{E}$-re történő megszorítása az $\mathbb{E}^*$ eleme, amelyet $x_{\bar{a}}$-val jelölünk. A *megszorítás projekciójának* jelölésére bevezetjük a $\delta_{\bar{b}}{}^a \in Lin(\mathbb{M}^*, \mathbb{E}^*)$ jelölést. Tehát $\delta_{\bar{a}}{}^b x_b = x_{\bar{a}}$.

A $\delta_{\bar{b}}{}^a \in Lin(\mathbb{M}^*, \mathbb{E}^*)$ megszorítás a $\delta^a_{\bar{b}} \in Lin(\mathbb{E}, \mathbb{M})$ kanonikus beágyazás duálisa (transzponáltja). Az euklidészi szerkezet lehetővé teszi $\mathbb{E}$ és $\mathbb{E}^*$ azonosítását, amelyet $\delta_{\bar{a}\bar{b}}$-vel, illetve $\delta^{\bar{a}\bar{b}}$-vel jelölt inverzével $x_{\bar{a}} = \delta_{\bar{a}\bar{b}} x^{\bar{b}}$, illetve $x^{\bar{a}} = \delta^{\bar{a}\bar{b}} x_{\bar{b}}$ formában írunk. Viszont nincs mód $\mathbb{M}$ és $\mathbb{M}^*$ azonosítására, mert nincs rajtuk sem euklidészi, sem pszeudoeuklidészi szerkezet.

A vektorok és kovektorok fenti jelölésrendszere azt a tényt formalizálja, hogy az idő nincs beágyazva a téridőbe.

9.1. Széthasítások. A téridőben történő létezést világvonalak segítségével, időből téridőbe léképező $r : I \to M$ *világvonalfüggvényekkel* írjuk le. A világvonalfüggvényeknek a téridő szerkezetéből következő triviális tulajdonsága, hogy $\tau(r(t)) = t$. Ennek megfelelően bármilyen időpontban képezett időderiváltjaik, a Galilei-relativisztikus *négyessebességek* olyan speciális u^a négyesvektorok, amelyek időkiértékelése, $\tau_a u^a = 1$. Egy *négyesvektor* fizikai mennyiség *térszerű részét* egy adott u^a négyessebesség irányú vetületével képezzük. Az u^a irányú vetítő függvény, az *u-projekció* $\pi(u)^{\bar a}_{\ b} = \delta^a_{\ b} - u^a\tau_b : \mathbb{M} \to \mathbb{E}$ lesz, ahol $\delta^a_{\ b}$ az identitás $\mathbb{M}$-en.

A négyessebességek más szerepet is játszhatnak: időtartamhoz rendelnek téridőtartamot: $u^a : \mathbb{I} \to \mathbb{M}, t \mapsto u^a t$.

A téridővektorokra vonatkozó négy alapvető leképezést még egyszer felsoroljuk:

- $\tau_a : \mathbb{M} \to \mathbb{I}$,
- $u^a : \mathbb{I} \to \mathbb{M}$,
- $\pi(u)^{\bar a}_{\ b} = \delta^a_{\ b} - u^a\tau_b : \mathbb{M} \to \mathbb{E}$,
- $\delta^a_{\ \bar b} : \mathbb{E} \to \mathbb{M}$,

A duális terek közötti megfelelő leképezések:

- $\tau_a : \mathbb{I}^* \to \mathbb{M}^*$,
- $u^a : \mathbb{M}^* \to \mathbb{I}^*$,
- $\pi(u)^{\ \bar b}_{a} : \mathbb{E}^* \to \mathbb{M}^*$,
- $\delta_{\bar b}^{\ a} : \mathbb{M}^* \to \mathbb{E}^*$.

A fentiekből a következő azonosságok vezethetőek le:

$$\tau_a u^a = 1, \quad \tau_a \delta^a_{\ \bar b} = 0_{\bar b}, \quad \pi(u)^{\bar b}_{\ a} u^a = (\delta^b_{\ a} - u^b\tau_a)u^a = 0^{\bar b} \quad \pi(u)^{\bar a}_{\ b}\delta^b_{\ \bar c} = \delta^{\bar a}_{\ \bar c}. \tag{76}$$

Belátható az is, hogy $\delta_{\bar c}^{\ a}\pi_a^{\ \bar b}(u) = \delta_{\bar c}^{\ \bar b}$, és $\tau_a u^c + \pi_a^{\ \bar b}(u)\delta_{\bar b}^{\ c} = \delta_a^{\ c}$, ezért aztán $\pi(u)_a^{\ \bar b}\delta_{\bar b}^{\ c} \neq \delta_a^{\ c}$. Vegyük észre, hogy speciálisan (76) második és utolsó egyenlőségéből következik, hogy $\tau_a x^{\bar a} = 0$ és $\pi(u)^{\bar a}_{\ b}x^{\bar b} = x^{\bar a}$.

Két ábrába összefoglalva megjegyezhetőbbek a viszonyok:

$$\mathbb{E} \ \underset{\delta^a_{\ \bar b}}{\overset{\pi(u)^{\bar a}_{\ b}}{\leftrightarrows}} \ \mathbb{M} \ \underset{u^a}{\overset{\tau_a}{\rightleftarrows}} \ \mathbb{I} \qquad\qquad \mathbb{E}^* \ \underset{\pi(u)_b^{\ \bar a}}{\overset{\delta_{\bar b}^{\ a}}{\leftrightarrows}} \ \mathbb{M}^* \ \underset{\tau_a}{\overset{u^a}{\rightleftarrows}} \ \mathbb{I}^*$$

A fenti diagramok felső sorának leképezései egy téridővektor és kovektor idő- és térszerű részre történő széthasítását adják meg.

9.2. Vektor *u*-formája. A vektorok maguk előállíthatóak egy u^a sebességgel széthasított részeikből. A továbbiakban az ilyen előállítást a vektor *u-formájának* nevezzük. Legyen például A^a egy téridővektor. Ekkor idő- és u-térszerű részeinek és a széthasító u^a négyessebesség segítségével előállítható:

$$A^a = Au^a + A(u)^{\bar a}, \tag{77}$$

ahol $A = \tau_a A^a$ a vektor időszerű része, $A(u)^{\bar a} = \pi(u)^{\bar a}_{\ b}A^b$ pedig az u-térszerű része. Vektor időszerű része nem függ u-tól, ezért abszolút, a térszerű része viszont függ, ahogy ezt jelöltük is. Speciálisan egy u^a sebességvektor időszerű része 1, egy másik u'^a sebesség szerinti térszerű része pedig

$$\pi(u')^{\bar a}_{\ \ b}u^b = (\delta^a_{\ b} - u'^a\tau_b)u^b = u^a - u'^a = v^{\bar a},$$

az u^a *relatív sebessége* u'^a-hoz képest.

Galilei-relativisztikus téridőn az extenzív mennyiségek természetes módon négyesvektorok, amelyek időszerű része a sűrűség, u-térszerű része az áramsűrűség. Az extenzív mennyiségek sűrűsége független a széthasító sebességtől, térszerű része, azaz áramsűrűsége, nem az. Látni fogjuk, hogy az u-függetlenség Galilei-invarianciát is jelent.

9.3. Kovektor u-formája. Hasonló módon kovektorok is általánosan felírhatók u-idő és térszerű komponenseik és a széthasításhoz használt négyessebesség segítségével. Egy B_a kovektor:

$$B_a = B(u)\tau_a + \pi(u)_a^{\bar{b}} B_{\bar{b}}. \tag{78}$$

ahol $B = u^a B_a$ és $B_{\bar{a}} = \delta_{\bar{a}}^{\ b} B_b$.

Itt B_a térszerű része $B_{\bar{a}}$, de itt másképp jelenik meg, mint a vektor (77) előállításánál. A fenti felbontásban figyelnünk kell, hogy $\pi(u)_a^{\bar{b}}$ nem szedhető szét két részre, pontosabban $u^b B_{\bar{b}}$ önmagában nem képezhető, hiszen $B_{\bar{b}} \in \mathbb{E}^*$ és $\mathbb{E}^*$ nem részhalmaza $\mathbb{M}^*$-nak. Tehát a fenti formula $B_a = B(u)\tau_a + B_{\bar{a}} - \tau_a u^{\bar{b}} B_{\bar{b}} = (B(u) - u^b B_{\bar{b}})\tau_a + B_{\bar{a}}$, kényelmesnek tűnő csoportosítása tulajdonképpen helytelen. Azonban a térszerű-időszerű felbontás szemléletessége, és az abszolút térszerű rész önálló megjelenése miatt a számolások áttekinthetőségéből származó előnyök nagyobbak, mint a hibázás lehetősége, ezért a továbbiakban mégis használni fogjuk, ügyelve arra, hogy $\pi(u)_a^{\bar{b}}$ két része mindig pontosan szerepeljen a formulákban.

A téridő-deriválás ∂_a, mint szimbolikus kovektor u-formája jól mutatja ezeknek a felbontásoknak a szerepét. A következőképpen írható fel egy u^a négyessebesség szerint széthasított idő- és térszerű komponenseivel:

$$\partial_a = \tau_a D_u + \pi(u)_a^{\bar{b}} \nabla_{\bar{b}} = (D_u - u^{\,b} \nabla_{\bar{b}})\tau_a + \nabla_{\bar{a}}, \tag{79}$$

ahol $D_u = u^a \partial_a$ az u-időszerű deriválás, $\nabla_{\bar{a}}$ pedig a térszerű deriválás. A térszerű deriválás abszolút.

9.4. Tenzor u-formája. Egy $T^{ab} \in \mathbb{M} \otimes \mathbb{M}$ másodrendű kontra-kontravariáns tenzor u-formája a következő:

$$T^{ab} = t^a u^b + t^{a\bar{b}} = u^a t^b + t^{\bar{a}b} = t u^a u^b + u^a t^{\bar{b}} + t^{\bar{a}} u^b + t^{\bar{a}\bar{b}}, \tag{80}$$

ahol

- $t = \tau_a \tau_b T^{ab}$ a T^{ab} tenzor *idő-időszerű része*. Láthatóan ez u-független, abszolút.
- $t^{\bar{a}} = \pi(u)_b^{\bar{a}} T^{bc} \tau_c$ a T^{ab} tenzor *tér-időszerű része*, illetve $t^{\bar{b}} = \tau_c T^{ca} \pi(u)_a^{\bar{b}}$ az *idő-térszerű rész.*
- $t^{\bar{a}\bar{b}} = \pi(u)_c^{\bar{a}} T^{cd} \pi(u)_d^{\bar{b}}$ a T^{ab} tenzor *tér-térszerű része.*
- $t^a = \tau_b T^{ab}$ és $t^b = \tau_a T^{ab}$. A T^{ab} tenzor u-független, ezért abszolútak a bal és jobb időszerű részei. Ha a tenzor szimmetrikus, akkor $\tau_b T^{ab} = \tau_b T^{ba} = t^a$.
- $t^{a\bar{b}} = \pi(u)_c^{\bar{b}} T^{ac}$ és $t^{\bar{a}b} = \pi(u)_c^{\bar{a}} T^{cb}$ a tenzor bal és jobb térszerű részei.

9.5. Vegyes tenzor u-formája. Egy $Q^a_{\ b} \in \mathbb{M} \otimes \mathbb{M}^*$ másodrendű kontra-kovariáns tenzor u-formája a következő:

$$\begin{aligned} Q^a_{\ b} = q^a \tau_b + \pi(u)_b^{\bar{c}} q^a_{\ \bar{c}} = q u^a \tau_b + q^{\bar{a}} \tau_b + u^a \pi(u)_b^{\bar{c}} q_{\bar{c}} + q^{\bar{a}}_{\ \bar{c}} \pi(u)_b^{\bar{c}} = \\ (u^a (q - u^c q_{\bar{c}}) + q^{\bar{a}} - q^{\bar{a}}_{\ \bar{c}} u^c)\, \tau_b + q_{\bar{b}} u^a + q^{\bar{a}}_{\ \bar{b}}, \end{aligned} \tag{81}$$

ahol

- $q = u^b \tau_a Q^a_{\ b}$, a $Q^a_{\ b}$ vegyes tenzor *idő-időszerű része*,
- $q^{\bar a} = u^b \pi(u)^{\bar a}_{\ c} Q^c_{\ b}$, a $Q^a_{\ b}$ vegyes tenzor *tér-időszerű része*,
- $q_{\bar b} = \tau_a \delta_{\bar b}^{\ c} Q^a_{\ c}$, a $Q^a_{\ b}$ vegyes tenzor *idő-térszerű része*. Ez a rész u-független, abszolút.
- $q^{\bar a}_{\ \bar b} = \pi(u)^{\bar a}_{\ c} \delta_{\bar b}^{\ d} Q^c_{\ d}$, a $Q^a_{\ b}$ vegyes tenzor *tér-térszerű része*,
- $q^a = u^b Q^a_{\ b}$, a $Q^a_{\ b}$ vegyes tenzor *ko-időszerű része*,
- $q^a_{\ \bar b} = \delta^c_{\ \bar b} Q^a_{\ c}$, a $Q^a_{\ b}$ vegyes tenzor u-független *ko-térszerű része*.

Vegyes tenzornál u-függetlenül nem értelmezhető a szimmetria.

9.6. Kotenzor u-formája. Egy $R_{ab} \in \mathbb{M}^* \otimes \mathbb{M}^*$ ko-kovariáns tenzor u-formája a következő:

$$
\begin{aligned}
R_{ab} &= r_a \tau_b + r_{a\bar c} \pi(u)_b^{\bar c} = \tau_a r_b + r_{\bar c b} \pi(u)_a^{\bar c} \\
&= r \tau_a \tau_b + r_{\bar c} \pi(u)_a^{\bar c} \tau_b + r_{\bar c} \tau_a \pi(u)_b^{\bar c} + r_{\bar c \bar d} \pi(u)_b^{\bar c} \pi(u)_a^{\bar d} \\
&= \left(r - 2 r_{\bar c} u^c + r_{\bar c \bar d} u^c u^d\right) \tau_a \tau_b + \left(r_{\bar b} - r_{\bar b \bar d} u^d\right) \tau_a + \left(r_{\bar a} - r_{\bar a \bar d} u^d\right) \tau_b + r_{\bar a \bar b},
\end{aligned}
\tag{82}
$$

ahol

- $r = u^a u^b R_{ab}$, az R_{ab} kotenzor *idő-időszerű része*,
- $r_{\bar a} = \delta_{\bar a}^{\ c} u^b R_{cb}$, az R_{ab} kotenzor *tér-időszerű része*, illetve $r_{\bar b} = \delta_{\bar b}^{\ c} u^a R_{ac}$, az *idő-térszerű része*,
- $r_{\bar a \bar b} = \delta_{\bar a}^{\ c} \delta_{\bar b}^{\ d} R_{cd}$, az R_{ab} kotenzor *tér-térszerű része*. Ez az u-független rész,
- $r_a = u^b R_{ab}$ és $r_b = u^a R_{ab}$ az R_{ab} kotenzor bal és jobb *ko-időszerű részei*. Ha a kotenzor szimmetrikus, akkor $u^b R_{ab} = u^b R_{ba}$.
- $r_{a\bar b} = \delta_{\bar b}^{\ c} R_{ac}$ és $r_{\bar a b} = \delta_{\bar a}^{\ c} R_{cb}$ az R_{ab} kotenzor u-független bal és jobb *ko-térszerű részei*.

10. B függelék. Megfigyelők és Galilei-transzformáció

A téridőmodell pontosan tükrözi azt a mindennapi tapasztalatunkat, hogy az idő tőlünk függetlenül telik, de a tér, a környezetünkben levő tárgyak által kirajzolt környezet szubjektív, megfigyelőfüggő. Az idő abszolút, a tér relatív. A relatív szempontokat a megfigyelők segítségével értelmezzük. Egy megfigyelő a téridőn adott sima négyessebességmező (lásd [6]), amely általában nem kell, hogy mindenütt értelmezett, azaz globális legyen. A tehetetlenségi megfigyelőket konstans sebességmezővel reprezentáljuk.

Az előzőekben vektoroknak, kovektoroknak, tenzoroknak négyessebességek szerinti széthasítását tárgyaltuk. Az abszolút fizikai mennyiségek vektormezők, kovektormezők, tenzormezők, azaz a téridőn értelmezett vektor, kovektor, tenzor, stb. értékű függvények. Az ilyenek széthasítása pontonként történik. Például, ha $A^a : M \to \mathbb{M}$ vektormező, és u^a megfigyelő, akkor az x téridőpontban $A^a(x)$-et az idő és $u^a(x)$-térszerű részeivel így állítjuk elő:

$$A^a(x) = A(x) u^a(x) + A^{\bar a}(x). \tag{83}$$

Észben tartva, hogy itt minden pontonként értendő, el is hagyhatjuk az x-et a jelölésből, és ilyen értelemben a korábbi formuláink mind érvényben maradnak.

Most azt vizsgáljuk, hogyan viszonyulnak egymáshoz ugyanazon abszolút fizikai mennyiségnek két különböző négyessebesség szerinti idő- és térszerű részei, azaz hogy egyik megfigyelő által észlelt komponensekből hogyan képződnek egy másik megfigyelő által észlelt idő- és térszerű komponensek. Ezeket a *transzformációs szabályokat* egy téridő modellben egyértelműen kiszámolhatjuk.

A továbbiakban szükségünk lesz két különböző, u és u' négyessebesség szerinti projekciókra. Egyszerűbb lesz, ha a sebességek külön jelölését elhagyjuk, és a továbbiakban az u-projekciót egyszerűen $\pi^{\bar{a}}_{b}$-vel, az u'-projekciót pedig $\pi'^{\bar{a}}_{b}$-vel jelöljük.

10.1. Vektorok. Láttuk, hogy egy A^a vektort az u^a megfigyelő $A = \tau_a A^a$ időszerű és $A^{\bar{a}} = \pi^{\bar{a}}_{b} A^b$ u-térszerű részekre bontja. A nemrelativisztikus fizikai elméletek téridőtudatlanul ezeket a mennyiségeket önállóan használják, leválasztva a téridőről. Két különböző u^a és u'^a négyessebesség különböző idő- és térszerű komponenseket eredményezhet:

$$A^a \overset{u}{\prec} \begin{pmatrix} A \\ A^{\bar{a}} \end{pmatrix}, \qquad A^a \overset{u'}{\prec} \begin{pmatrix} A' \\ A'^{\bar{a}} \end{pmatrix},$$

ahol $\overset{u}{\prec}$ jelöli az u^a szerinti széthasítást.

A megfigyelők közötti váltást megadó transzformációs szabályok megmondják, hogy az A' és $A'^{\bar{a}}$ hogyan függ A-tól és $A^{\bar{a}}$-tól. Téridőmodellünkben ezt egyszerűen úgy számolhatjuk ki, hogy a u^a-val széthasított komponensekkel kifejezett fizikai mennyiséget, jelen esetben ez $A^a = Au^a + A^{\bar{a}}$-t, széthasítjuk u'^a szerint. Tehát egy vektor időszerű komponense:

$$A' = \tau_a A^a = \tau_a (Au^a + A^{\bar{a}}) = A, \tag{84}$$

nem változik, nem transzformálódik, azaz Galilei-invariáns. Ez nem meglepő, mert a széthasító függvény nem függ a sebességektől. Egy A^a vektor térszerű komponense:

$$\begin{aligned} A'^{\bar{a}} =& \pi'^{\bar{a}}_{b} A^b = (\delta^a_b - u'^a \tau_b) \left(Au^b + A^{\bar{b}} \right) = Au^a + A^{\bar{a}} - Au'^a = \\ & A^{\bar{a}} + A(u^a - u'^a) = A^{\bar{a}} + Av^{\bar{a}}, \end{aligned} \tag{85}$$

ahol u^a-nak u'^a-ra vonatkoztatott relatív sebességére bevezettük a

$$v^{\bar{a}} = u^a - u'^a \tag{86}$$

jelölést. A fenti formula a négyesvektor térszerű komponensének transzformációs szabálya, amelyet relatív indexekkel is felírunk

$$A'^i = A^i + Av^i. \tag{87}$$

Ez pontosan a szokásos *Galilei-transzformáció*. (85) és (87) ugyanaz a formula, csak más jelölésekkel. Emlékeztetünk, hogy az $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ hármasindexek az előbbiek szerint arra utalnak, hogy az adott formulában egyszerre két négyessebességmező is jelen van. Ezzel a jelöléssel abszolút formuláinkat élesen megkülönböztetjük a szokásos 1+3 dimenziós alaktól és beillesztjük a Galilei-transzformációs gondolkodásmódba.

A teljes transzformációs szabály:

$$\begin{pmatrix} A' \\ A'^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ A^i + Av^i \end{pmatrix}. \tag{88}$$

Speciálisan a sebességek transzformációs szabálya ebből közvetlenül is származtatható. Egy négyessebesség önmaga szerinti széthasítása

$$u^a \overset{u}{\prec} \begin{pmatrix} 1 \\ 0^{\bar{a}} \end{pmatrix}.$$

Ennek megfelelően a térszerű komponensének transzformációs szabálya a relatív sebességet adja,

$$\pi'^{\bar{a}}_{\ b} u^b = (\delta^a_b - u'^a \tau_b) u^b = u^a - u'^a = v^{\bar{a}}, \tag{89}$$

ahogy ezt vártuk is. A teljes szabály:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0'^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ v^i \end{pmatrix}, \tag{90}$$

ami egyszerűen azt jelenti, hogy az önmagához képest 'állónak' tekintett u'^a megfigyelő állása másik u^a megfigyelő számára v^i sebességgel történő mozgásnak látszik. Fontos megértenünk, hogy az összes többi transzformációs szabály jelentése mutatis mutandis ugyanezt jelenti.

A Galilei-transzformáció ebben a fejezetben levezetett formuláiban tetszőleges két sebességmező szerepel, vagyis ezek egyáltalán nem kötődnek inerciális megfigyelőkhöz. Szokásosan csak a Galilei-invariáns fizikai mennyiségeket tartják vonatkoztatási rendszertől függetlennek, holott nemcsak azok, hanem transzformálódó mennyiségek megfelelő kombinációja is abszolút lehet, amennyiben egy abszolút téridőmennyiség komponenseiről van szó. Egy négyesvektorral megadott abszolút fizikai mennyiség (pl. egy extenzív) időszerű komponense (a sűrűsége) Galilei-invariáns és ezért abszolút, a térszerű komponense (az áramsűrűsége) transzformálódik, ezért nem abszolút, de ez nem változtat semmit azon, hogy az egész extenzív vektorsűrűség abszolút. Ugyanez érvényes a sebességre, ahol a négyessebesség abszolút, annak ellenére, hogy látszólag csak a térszerű komponens hordoz fizikai információt. Téridőmodellben megfogalmazva egy fizikai elméletet pontosan eldönthető, hogy mi függ a vonatkoztatási rendszertől, mi nem.

10.2. Kovektorok. Láttuk, hogy egy B_a kovektort az u^a sebesség $B = u^a B_a$ időszerű és $B_{\bar{a}} = \delta_{\bar{a}}^{\ b} B_b$ térszerű részekre bont. A kovektorok széthasított komponenseit alsó indexszel és sorvektorokkal reprezentáljuk:

$$B_a \overset{u}{\prec} (B, B_{\bar{a}}).$$

Az előbbiek alapján az időszerű komponens felbontható a következő módon:

$$B' = u'^a B_a = u'^a (B\tau_a + \pi_a^{\ \bar{b}} B_{\bar{b}}) = B - v^{\bar{a}} B_{\bar{a}}, \tag{91}$$

ahol felhasználtuk (89)-t. A térszerű komponens transzformációs szabálya, felhasználva a (76) azonosságokat:

$$B'_{\bar{a}} = \delta_{\bar{a}}^{\ b} B_b = \delta_{\bar{a}}^{\ b} (B\tau_b + \pi_b^{\ \bar{c}} B_{\bar{c}}) = B_{\bar{a}}, \tag{92}$$

A teljes szabály, az előző szakaszban bevezetett tisztán 1+3 dimenziós jelölésekkel:

$$(B', B'_i) = (B - v^i B_i, B^i). \tag{93}$$

Ezt például a ∂_a téridőderiválásra mint szimbolikus kovektorra alkalmazva kapjuk, hogy:

$$(D_{u'}, \nabla'_i) = (D_u - v^i\nabla_i, \nabla_i). \tag{94}$$

Speciálisan, ha az u^a sebesség valamely közeg sebességmezője, u'^a pedig egy megfigyelőé, akkor D_u a *szubsztanciális időderivált*, v^i a megfigyelőnek a közeghez viszonyított sebessége és $D_{u'} = D_u - v^i\nabla_i$. A $D_{u'} = \partial_t$ *parciális időderivált* és a $D_u = d_t$ szubsztanciális időderivált közötti összefüggés: $\partial_t = d_t - v^i\nabla_i$. Érdemes ezt a gondolatmenetet összevetni a megszokott, összetett függvényekre alapozott levezetéssel (lásd pl. [88]).

10.3. Tenzorok. Egy T^{ab} másodrendű kontravariáns tenzort az u^a megfigyelő $t = \tau_a\tau_b T^{ab}$ idő-időszerű, $t^{\bar a} = \pi^{\bar a}{}_c\tau_b T^{cb}$ idő-térszerű, $t^{\bar b} = \tau_a\pi^{\bar b}{}_c T^{ac}$ tér- időszerű és $t^{\bar a\bar b} = \pi^{\bar a}{}_c\pi^{\bar b}{}_d T^{cd}$ tér-térszerű komponensekre hasít szét. Azaz

$$T^{ab} \overset{u}{\prec} \begin{pmatrix} t & t^{\bar a} \\ t^{\bar b} & t^{\bar a\bar b} \end{pmatrix}.$$

Mivel T^{ab} nem feltétlen szimmetrikus, ezért itt általában $t^{\bar a} \neq t^{\bar b}$ és $t^{\bar a\bar b} \neq t^{\bar b\bar a}$. A megfelelő transzformációs szabályok a következő módon számolhatóak. Az idő-időszerű komponens invariáns:

$$t' = \tau_a\tau_b T^{ab} = t. \tag{95}$$

Az idő-térszerű komponens transzformációs szabálya olyan, mint egy hármasvektoré:

$$t'^{\bar a} = \pi'^{\bar a}{}_c\tau_b T^{cb} = (\delta^a_c - u'^a\tau_c)(tu^c + t^{\bar c}) = tu^a - tu'^a + t^{\bar a} = t^{\bar a} + tv^{\bar a}. \tag{96}$$

A tér-térszerű komponensé bonyolultabb:

$$\begin{aligned} t'^{\bar a\bar b} =& \pi'^{\bar a}{}_c\pi'^{\bar b}{}_d T^{cd} = \pi'^{\bar a}{}_c\pi'^{\bar b}{}_d(tu^cu^d + t^{\bar c}u^d + u^ct^{\bar d} + t^{\bar c\bar d}) = \\ =& tv^{\bar a}v^{\bar b} + t^{\bar a}v^{\bar b} + t^{\bar b}v^{\bar a} + t^{\bar a\bar b}. \end{aligned} \tag{97}$$

Itt ismét felhasználtuk (89)-t.

A teljes transzformációs szabály a megszokott jelölésekkel:

$$\begin{pmatrix} t' & t'^i \\ t'^j & t'^{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & t^i + tv^i \\ t^j + tv^j & t^{ij} + t^iv^j + t^jv^i + tv^iv^j \end{pmatrix}. \tag{98}$$

10.4. Vegyes másodrendű tenzorok. Egy $Q^a_{\ b}$ másodrendű kontra-kovariáns tenzort az u^a megfigyelő $q = \tau_a u^b Q^a_{\ b}$ idő-időszerű, $q^{\bar a} = \pi^{\bar a}{}_c u^b Q^c_{\ b}$ tér-időszerű, $q_{\bar b} = \tau_a\delta_{\bar b}{}^d Q^a_{\ d}$ idő-térszerű és $q^{\bar a}_{\ \bar b} = \pi^{\bar a}{}_c\delta_{\bar b}{}^d Q^c_{\ d}$ tér-térszerű komponensekre hasít szét. Azaz

$$Q^a_{\ b} \overset{u}{\prec} \begin{pmatrix} q & q^{\bar a} \\ q_{\bar b} & q^{\bar a}_{\ \bar b} \end{pmatrix}.$$

Vegyes tenzorok szimmetriájáról nincs értelme beszélni, a széthasított forma már lehet szimmetrikus de ez a szimmetria u^a, azaz megfigyelőfüggő.A megfelelő transzformációs szabályok a következő módon számolhatóak. Az idő-időszerű komponensre:

$$q' = \tau_a u'^b Q^a_{\ b} = u'^b(q\tau_b + \pi_b{}^{\bar c} q_{\bar c}) = q - v^{\bar c} q_{\bar c}. \tag{99}$$

A hármasvektornak kinéző idő-térszerű komponens nem transzformálódik, ahogy az egyszerűen belátható (76) azonosságok következményeképpen:

$$q'_{\bar b} = \tau_a \delta_{\bar b}^{\ c} Q^a_{\ c} = \delta_{\bar b}^{\ c}(q\tau_c + \pi_c^{\ \bar d} q_{\bar d}) = q_{\bar b}. \tag{100}$$

A tér-időszerű komponens transzformációs szabálya:

$$q'^{\bar a} = \pi'^{\bar a}_{\ c} u'^b Q^c_{\ b} = \pi'^{\bar a}_{\ c}(qu^c + q^{\bar c} - u^c v^{\bar d} q_{\bar d} - q^{\bar c}_{\ \bar d} v^{\bar d}) = q^{\bar a} + qv^{\bar a} - v^{\bar a} v^{\bar b} q_{\bar b} - q^{\bar a}_{\ \bar b} v^{\bar b}. \tag{101}$$

A tér-térszerű komponens transzformációs szabálya:

$$q'^{\bar a}_{\ \bar b} = \pi'^{\bar a}_{\ c} \delta_{\bar b}^{\ d} Q^c_{\ d} = \pi'^{\bar a}_{\ c}(q_{\bar b} u^c + q^{\bar c}_{\ \bar b}) = q^{\bar a}_{\ \bar b} + v^{\bar a} q_{\bar b}. \tag{102}$$

Itt ismét felhasználtuk az eddigi azonosságokat. A teljes transzformációs szabály a megszokott jelölésekkel:

$$\begin{pmatrix} q' & q'_i \\ q'^j & q'^j_{\ i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q - v^i q_i & q_i \\ q^j + v^j(q - v^k q_k) - q^j_{\ k} v^k & q^j_{\ i} + q_i v^j \end{pmatrix}. \tag{103}$$

10.5. Másodrendű kotenzorok. Egy R_{ab} másodrendű ko-kovariáns tenzort az u^a megfigyelő $r = u^a u^b R_{ab}$ idő-időszerű, $r_{\bar a} = \delta_{\bar a}^{\ c} u^b R_{cb}$ tér-időszerű, $r_{\bar b} = u^a \delta_{\bar b}^{\ d} R_{ad}$ idő- térszerű és $r_{\bar a \bar b} = \delta_{\bar a}^{\ c} \delta_{\bar b}^{\ d} R_{cd}$ tér-térszerű komponensekre hasít szét. Azaz

$$R_{ab} \overset{u}{\prec} \begin{pmatrix} r & r_{\bar a} \\ r_{\bar b} & r_{\bar a \bar b} \end{pmatrix}.$$

Mivel R_{ab} nem feltétlen szimmetrikus, ezért itt általában $r_{\bar a} \neq r_{\bar b}$ és $r_{\bar a \bar b} \neq r_{\bar b \bar a}$. A megfelelő transzformációs szabályok a következő módon számolhatóak. Az idő-időszerű komponensre:

$$\begin{aligned} r' = u'^a u'^b R_{ab} = u'^a u'^b \left(r\tau_a \tau_b + r_{\bar c} \pi_a^{\ \bar c} \tau_b + r_{\bar c} \tau_a \pi_b^{\ \bar c} + r_{\bar c \bar d} \pi_b^{\ \bar c} \pi_a^{\ \bar d} \right) = \\ u'^a \left(r\tau_a + r_{\bar c} \pi_a^{\ \bar c} - r_{\bar c} \tau_a v^{\bar c} - r_{\bar c \bar d} v^{\bar c} \pi_a^{\ \bar d} \right) = r - 2 r_{\bar c} v^c + r_{\bar c \bar d} v^{\bar c} v^{\bar d}. \end{aligned} \tag{104}$$

Az idő-térszerű komponens transzformációs szabálya:

$$r'_{\bar a} = \delta_{\bar a}^{\ c} u'^b R_{cb} = \delta_{\bar a}^{\ c} \left(r\tau_c + r_{\bar d} \pi_c^{\ \bar d} - r_{\bar d} \tau_c v^{\bar d} - r_{\bar d \bar e} v^{\bar e} \pi_c^{\ \bar d} \right) = r_{\bar a} - r_{\bar a \bar d} v^{\bar d}. \tag{105}$$

A tér-térszerű komponens invariáns:

$$r'_{\bar a \bar b} = \delta_{\bar a}^{\ c} \delta_{\bar b}^{\ d} R_{cd} = r_{\bar a \bar b}. \tag{106}$$

Itt ismét felhasználtuk az eddigi azonosságokat. A teljes transzformációs szabály a megszokott jelölésekkel:

$$\begin{pmatrix} r' & r'_i \\ r'_j & r'_{ji} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r - 2v^k r_k + v^k v^l r_{kl} & r_i - v^j r_{ij} \\ r_j - v^k t_{jk} & r_{ij} \end{pmatrix}. \tag{107}$$

11. Köszönetek

Matolcsi Tamásnak, aki modellbe tömörítette a téridőket és Fülöp Tamásnak, aki mindig mondta, hogy van abszolút energia. Itt ugyan nem kotenzornak tűnik, de még az sincs kizárva.

A munkát az Otka K104260 pályázata támogatta.

Hivatkozások

[1] H. Weyl. *Raum-Zeit-Matterie*. Julius Springer, Berlin, 1918. in German.

[2] H. Weyl. *Space-Time-Matter*. Methuen and Co. Ltd., London, 1922.

[3] P. Havas. Four-dimensional formulations of Newtonian mechanics and their relation to the special and the general theory of relativity. *Reviews of Modern Physics*, pages 938–965, 1964.

[4] M. Friedman. *Foundations of Space-Time Theories (Relativistic Physics and Philosophy of Science)*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1983.

[5] T. Matolcsi. *A Concept of Mathematical Physics: Models in Mechanics*. Akadémiai Kiadó (Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences), Budapest, 1986.

[6] T. Matolcsi. *Spacetime Without Reference Frames*. Akadémiai Kiadó Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences), Budapest, 1993.

[7] Fülöp T. A tér nem abszolút - a téridő, mint a Galilei-féle relativitási elv következménye. Szerk. Fülöp T., *Új eredmények a kontinuumfizikában*, *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár 8*, 11–35 o. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2008.

[8] T. Matolcsi and P. Ván. Absolute time derivatives. *Journal of Mathematical Physics*, 48:053507–19, 2007. math-ph/0608065.

[9] R. H. Dicke. Mach's principle and invariance under transformation of units. *Physical Review*, 125(6):2163, 1962.

[10] G. I. Barenblatt. *Scaling, self-similarity, and intermediate asymptotics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[11] László A. Conformal invariance without referring to metric. 2014. arXiv:1406.5888.

[12] J. G. Oldroyd. On the formulation of rheological equations of state. *Proceedings of Royal Society of London, A*, 200:523–541, 1949.

[13] W. Noll. Space-time structures in classical mechanics. In *The foundations of mechanics and thermodynamics (Selected papers by Walter Noll)*, pages 204–210. Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1974. originally: pp28-34, Delaware Seminar in the Foudnations of Physics, Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1967.

[14] W. Noll. Five contributions to natural philosophy. 2004. www.math.cmu.edu/∼wn0g/noll/FC.pdf.

[15] W. Noll. A frame free formulation of elasticity. *Journal of Elasticity*, 83:291–307, 2006.

[16] W. Noll and B. Seguin. Basic concepts of thermomechanics. *Journal of Elasticity*, 101:121–151, 2010.

[17] G. Jaumann. Geschlossenes System physikalischer und chemischer Differentialgesetze (I. Mitteilung). *Sitzungsberichte der kaiserliche Akademie der Wissenschaften in Wien*, CXVII(Mathematisch IIa):385–528, 1911.

[18] W. Noll. A mathematical theory of the mechanical behavior of continuous media. *Archives of Rational Mechanics and Analysis*, 2:197–226, 1958/59.

[19] I. Müller. On the frame dependence of stress and heat flux. *Archive of Rational Mechanics and Analysis*, 45:241–250, 1972.

[20] D. G. B. Edelen and J. A. McLennan. Material indifference: a principle or a convenience. *International Journal of engineering Science*, 11:813–817, 1973.

[21] F. Bampi and A. Morro. Objectivity and objective time derivatives in continuum physics. *Foundations of Physics*, 10(11/12):905–920, 1980.

[22] A. I. Murdoch. On material frame-indifference, intrinsic spin and certain constitutive relations motivated by the kinetic theory of gases. *Archive of Rational Mechanics and Analysis*, 83:185–194, 1983.

[23] G. Ryskin. Misconception which led to the "material frame indifference" controversy. *Physical Review E*, 32(2):1239–1240, 1985.

[24] G. Ryskin. Reply to "comments on the 'material frame indifference' controversy". *Physical Review E*, 36(9):4526, 1987.

[25] C. G. Speziale. Comments on the "material frame indifference" controversy. *Physical Review E*, 36(9):4522–4525, 1987.

[26] C. G. Speziale. A review of material frame-indifference in mechanics. *Applied Mechanical Reviews*, 51(8):489–504, 1998.

[27] B. Svendsen and A. Bertram. On frame-indifference and form-invariance in constitutive theory. *Acta Mechanica*, 132:195–207, 1999.

[28] A. Bertram and B. Svendsen. On material objectivity and reduced constitutive equations. *Archive of Mechanics*, 53:653–675, 2001.

[29] M. Massoudi. On the importance of material frame-indifference and lift forces in multiphase flow. *Chemical Engineering Science*, 57:3687–3701, 2002.

[30] A. I. Murdoch. Objectivity in classical continuum physics: a rationale for discarding the 'principle of invariance under superposed rigid body motions' in favour of purely objective considerations. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 15:309–320, 2003.

[31] I-S. Liu. On Euclidean objectivity and the principle of material frame-indifference. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 16:177–183, 2003.

[32] A. I. Murdoch. On criticism of the nature of objectivity in classical continuum physics. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 17:135–148, 2005.

[33] I-S. Liu. Further remarks on Euclidean objectivity and the principle of material frame-indifference. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 17:125–133, 2005.

[34] A. Yavari, J. E. Marsden, and M. Ortiz. On spatial and material covariant balance laws in elasticity. *Journal of Mathematical Physics*, 47:042903, 2006.

[35] M. Frewer. More clarity on the concept of material frame-indifference on classical continuum mechanics. *Acta Mechanica*, 202:213–246, 2009.

[36] P. M. Mariano. SO(3) invariance and covariance in mixtures of simple bodies. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 40:1023–1030, 2005.

[37] P. M. Mariano. Geometry and balance of hyperstresses. *Rendiconti dei Lincei Matematica Applicata*, 18:311–331, 2007.

[38] P. M. Mariano. Cracks in complex bodies: covariance of tip balances. *J. of Nonlinear Science*, 18:99–141, 2008.

[39] W. Muschik. Objectivity and frame indifference, revisited. *Archive of Mechanics*, 50:541–547, 1998.

[40] W. Muschik and L. Restuccia. Changing the observer and moving materials in continum physics: Objectivity and frame-idifference. *Technische Mechanik*, 22(3):152–160, 2002.

[41] W. Muschik and L. Restuccia. Systematic remarks on objectivity and frame-indifference, liquid crystal theory as an example. *Archive of Applied Mechanics*, 78(11):837–854, 2008.

[42] W. Muschik. Is the heat flux density really non-objective? A glance back, 40 years later. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 24(24):333–337, 2012.

[43] T. Matolcsi and T. Gruber. Spacetime without reference frames: An application to the kinetic theory. *International Journal of Theoretical Physics*, 35(7):1523–1539, 1996.

[44] T. Matolcsi and P. Ván. Can material time derivative be objective? *Physics Letters A*, 353:109–112, 2006. math-ph/0510037.

[45] Fülöp T. Kontinuumok kinematikájának új értelmezése. Szerk. Fülöp T., *Új eredmények a kontinuumfizikában*, *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár 8.*, 55–99 o. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2008.

[46] Fülöp T. és Ván P. Véges rugalmas és képlékeny deformációk leírása. Szerk. Fülöp T., *Idő és térderiváltak anyagtörvényekben*, *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár 10*, 99–151 o. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2010.

[47] T. Fülöp and P. Ván. Kinematic quantities of finite elastic and plastic deformations. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 35:1825–1841, 2012. arXiv:1007.2892v1.

[48] C. Eckart. The thermodynamics of irreversible processes. IV. The theory of elasticity and anelasticity. *Physical Review*, 73(4):373–382, 1948.

[49] H. Xiao O.T. Bruhns and A. Mayers. Constitutive inequalities for an isotropic elastic strain energy function based on Hencky's logarithmic strain tensor. *Proc. Roy. Soc. London A*, 457:2207–2226, 2001.

[50] C.O. Horgan and J.G. Murphy. A generalization of Hencky's strain-energy density to model the large deformations of slightly compressible solid rubbers. *Mechanics of Materials*, 79:943–950, 2009.

[51] F. Osterbrink P. Neff, B. Eidel and R. Martin. A Riemannian approach to strain measures in nonlinear elasticity. *C. R. Acad. Sci.*, 342:254–257, 2014.
[52] Patrizio Neff, Ionel-Dumitrel Ghiba, and Johannes Lankeit. The exponentiated Hencky-logarithmic strain energy. Part I: Constitutive issues and rank–one convexity. *Preprint*, 2014. arXiv:1403.4675.
[53] H. Brenner. Kinematics of volume transport. *Physica A*, 349:11–59, 2005.
[54] H. Brenner. Navier-Stokes revisited. *Physica A*, 349:60–132, 2005.
[55] H. Brenner. Fluid mechanics revisited. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 370(2):190–224, 2006.
[56] H. Brenner. Bi-velocity hydrodynamics: Single-component fluids. *International Journal of Engineering Science*, 47(9):930–958, 2009.
[57] H. Brenner. Diffuse volume transport in fluids. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 389(19):4026–4045, 2010.
[58] H. Brenner. Beyond Navier–Stokes. *International Journal of Engineering Science*, 54:67–98, 2012.
[59] H. Brenner. Steady-state heat conduction in a gas undergoing rigid-body rotation. comparison of Navier–Stokes–Fourier and bivelocity paradigms. *International Journal of Engineering Science*, 70:29–45, 2013.
[60] H. Brenner. Conduction-only transport phenomena in compressible bivelocity fluids: Diffuse interfaces and Korteweg stresses. *Physical Review E*, 89(4):043020, 2014.
[61] D. Bedeaux, S. Kjelstrup, and H.C. Öttinger. On a possible difference between the barycentric velocity and the velocity that gives translational momentum in fluids. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 371(2):177–187, 2006.
[62] H. C. Öttinger. Weakly and strongly consistent formulations of irreversible processes. *Physical Review Letters*, 99(13):130602(4), 2007.
[63] P. Ván. Generic stability of dissipative non-relativistic and relativistic fluids. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, page 02054, 2009. arXiv: 0811.0257.
[64] T. Ruggeri. Galilean invariance and entropy principle for systems of balance laws. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 1(1):3–20, 1989.
[65] I. Müller and T. Ruggeri. *Rational Extended Thermodynamics*, volume 37 of *Springer Tracts in Natural Philosophy*. Springer Verlag, New York-etc., 2nd edition, 1998.
[66] T. S. Bíró and P. Ván. About the temperature of moving bodies. *EPL*, 89:30001, 2010. arXiv:0905.1650v1.
[67] Horváth Róbert. A mozgási energia fogalmának egy új értelmezése. *KLTE MFK Tudományos Közleményei*, 23:29–33, 1997.
[68] L. Lange. On the Law of Inertia. *The European Physical Journal H*, 39(2):251–262, 2014.
[69] H. Pfister. Ludwig Lange on the law of inertia. *The European Physical Journal H*, 39(2):245–250, 2014.
[70] R. Penrose. *The Road to Reality*. Jonathan Cape, 2004.
[71] R. L. Liboff. *Kinetic Theory (Classical, Quantum, and Relativistic Descriptions)*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1990.
[72] T. Matolcsi. On material frame-indifference. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 91(2):99–118, 1986.
[73] T. Matolcsi. *Ordinary thermodynamics*. Akadémiai Kiadó (Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences), Budapest, 2005.
[74] T. Matolcsi. *Közönséges termodinamika*. Scholar Könyvkiadó, 2012.
[75] P. Ván. Kinetic equilibrium and relativistic thermodynamics. *EPJ WEB of Conferences*, 13:07004, 2011. arXiv:1102.0323.
[76] P. Ván and T.S. Biró. First order and generic stable relativistic dissipative hydrodynamics. *Physics Letters B*, 709(1-2):106–110, 2012. arXiv:1109.0985[nucl-th].
[77] P. Ván and T.S. Biró. Thermodynamics and flow-frames for dissipative relativistic fluids. In G. Chacón-Acosta, García-Perciante A.L., and A. Sandoval-Villalbazo, editors, *Plasma Physics and Relativistic Fluids*, volume 1578 of *AIP Conf. Proceedings*, pages 114–121, 2014.

Proceedings of the V Leopoldo García–Colín Mexican Meeting on Mathematical and Experimental Physics, El Colegio Nacional, September 9-13, 2013. Mexico City. arXiv:1310.5976.
[78] T. Matolcsi. Dynamical laws in thermodynamics. *Physics Essays*, 5(3):320–327, 1992.
[79] P. Ván. Asymptotic stability and the Second Law in Extended Irreversible Thermodynamics. In S. Rionero and T. Ruggeri, editors, *7th Conference on Waves and Stability in Continuous Media, Bologna, Italy October 4-9. 1993*, volume 23 of *Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences*, pages 384–389, Singapore-New Jersey-London-Hong Kong, October 1994. Quaderno CNR - Gruppo nazionale per la Fisica Matematica, World Scientific.
[80] P. Ván. Other Dynamic Laws in thermodynamics. *Physics Essays*, 8(4):457–465, 1995.
[81] P. Ván and T. S. Bíró. Relativistic hydrodynamics - causality and stability. *The European Physical Journal - Special Topics*, 155:201–212, 2008. arXiv:0704.2039v2.
[82] P. Ván. Internal energy in dissipative relativistic fluids. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 3(6):1161–1169, 2008. arXiv:07121437 [nucl-th].
[83] T. S. Bíró, E. Molnár, and P. Ván. A thermodynamic approach to the relaxation of viscosity and thermal conductivity. *Physical Review C*, 78:014909, 2008. arXiv:0805.1061 (nucl-th).
[84] P. Ván and T. S. Bíró. Transformations of relativistic temperature - Planck-Einstein, Ott, Landsberg and Doppler formulas as particular cases. Wolfram Demonstration Project, 2009.
[85] P. Ván and T. Biró. Dissipation flow-frames: particle, energy, thermometer. In M. Pilotelli and G. P. Beretta, editors, *Proceedings of the 12th Joint European Thermodynamics Conference*, pages 546–551, Brescia, 2013. Cartolibreria SNOOPY. ISBN 978-88-89252-22-2, arXiv:1305.3190.
[86] Ván P. Nemegyensúlyi termomechanika. volume 16 of *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár*, pages 339–344, Budapest, 2013. Hantken Kiadó.
[87] T. Matolcsi. *Téridőmodellek*. ETTE, 2015. szerk. Fülöp T.
[88] Gyarmati I. *Nemegyensúlyi termodinamika*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1967.

[1]MTA Wigner Fizikai Kutatóközpont, Részecske- és Magfizikai Intézet,, 1121 Budapest, Konkoly Thege Miklós út 29-33.; és [2]Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Energetikai Gépek és Rendszerek Tanszék,, H-1111, Budapest, Bertalan Lajos u. 4-6.;, Montavid Termodinamikai Kutatócsoport