

Heuréka! Heurisztika

Pólya György és „A gondolkodás iskolája”

Csordás Ágnes Berze TÖK tábor, 2025.07.11.

Pólya György élete

- Budapest, 1887. december 13. – Palo Alto, 1985. szeptember 7.
magyar matematikus, fizikus és metodológus. Világhírű tudós, a heurisztika kidolgozója.
- Középiskolai tanulmányait a budapesti Berzsenyi Dániel Gimnáziumban végezte.
- Egyetemi tanulmányait orvostanhallgatóként kezdte, majd félévig jogot hallgatott, végül magyar, latin és görög nyelvszakos tanárnak készült. Ekkor kezdett a filozófia iránt érdeklődni. Hogy jobban megértse azt, matematikát és fizikát is tanulni kezdett.

- Ekkor találkozott Beke Manóval, aki amikor meglátta az indexét a következőt mondta:
- „Maga a filozófiától jön a matematikához. Vissza fog térni a filozófiához. De ne térjen vissza túl korán.”
- A későbbiekben úgy jellemezte saját magát, hogy nem volt elég jó a fizikához, de túl jó volt a filozófiához, és a matematika a kettő között helyezkedik el.
- A budapesti Tudományegyetemen Fejér Lipót és Eötvös Lóránd tanítványa volt.
- Az 1910-es évek elején több félévet töltött ösztöndíjasként külföldi egyetemeken: Bécsben, Göttingenben, Párizsban.

- 1914-től 1940-ig Zürichben, a Műszaki egyetemen tanított.
- 1940-től Amerikában élt. 1942-től a Stanford egyetem professzora volt 1953-ig, nyugdíjazásáig. Egyetemi előadásait és kutatómunkáját ezután is tovább folytatta. Egyre növekvő energiával fordult a matematikatanítás kérdései felé.
- Legutolsó egyetemi előadássorozatát 91 éves korában tartotta kollégái számára.
- 1985. július 7-én, 97 éves korában, mint a Stanford Egyetem professzor emeritusa halt meg Palo Altóban.

A legismertebb, magyarra lefordított, matematikatanítással foglalkozó könyvei:

- A gondolkodás iskolája
- A problémamegoldás iskolája
- A matematikai gondolkodás művészete I. Indukció és analógia
II. A plauzibilis következtetés
- Matematikai módszerek a természettudományokban

A modern heurisztika

- A modern heurisztika a feladatmegoldás folyamatát akarja feltárni, elsősorban azokat a gondolati műveleteket, amelyek ebben a folyamatban különösen hasznosak.
- A heurisztika az ógörög heureszisz (rátalálás) szóból származik. Az új igazságok módszeres fölfedezésének művészete, az a folyamat, amelynek során nem szigorúan szabatos logikai következtetéssel jutunk el a premisszáktól a konklúzióig, ám az eredmény helyes lesz. Másképpen: az egyértelmű algoritmusok helyett próbálkozásokkal, korábban megszerzett tapasztalatok felhasználásával működő feladatmegoldási módszer.
- „Bármilyen probléma megoldása valamilyen nehéz helyzetből kivezető út megtalálását, valamilyen akadály megkerülését jelenti, olyan cél elérését, amelyhez egyébként közvetlenül nem tudtunk volna eljutni. A probléma megoldása az értelem jellegzetes teljesítménye, és az értelem az emberiség jellegzetes képessége: tulajdonképpen a problémamegoldás a legjellemzőbben emberi tevékenység. A problémamegoldás csakúgy gyakorlat kérdése, mint az úszás, sízés vagy zongorázás. Megtanulni is csak utánzás és gyakorlat útján lehet. Nem adhatok bűvös kulcsot, amely minden ajtót megnyit, és minden problémát megold, de adhatok utánozható jó példákat és sok alkalmat a gyakorlásra. Aki úszni akar tanulni, annak vízbe kell ugrania, aki problémákat megoldani akar megtanulni, annak a problémák megoldását kell gyakorolnia.”

Egy matematikai probléma megoldásának négy lépése a következők:

- Értsd meg a problémát!
- Készíts tervet a probléma megoldására!
(Keress összefüggést az adatok között! Ha nem találsz közvetlen összefüggést, nézz segédfeladatok után! Végül készítsd el a megoldás tervét!)
- Hajtsd végre a tervedet!
- Vizsgáld meg a megoldást!

ELŐSZÖR

Értsd meg a feladatot.

MÁSODSZOR

Keress összefüggést az adatok és az ismeretlen között.

Ha nem találsz közvetlen összefüggést, nézz segédfeladatok után.

Végül készítsd el a megoldás *tervét*.

HARMADSZOR

Hajtsd végre tervedet.

NEGYEDSZER

Vizsgáld meg a megoldást.

A FELADAT MEGÉRTÉSE

- *Mit keresünk? Mi van adva? Mit kötünk ki?*
- Kielégíthető-e a kikötés? Elegendő a kikötés az ismeretlen meghatározásához? Vagy nem elegendő? Vagy kevesebb is elég volna? Vagy ellentmondás van benne?
- Rajzolj ábrát. Vezess be alkalmas jelölést.
- Válaszd szét a kikötés egyes részeit. Fel tudod írni őket?

TERVKÉSZÍTÉS

- Nem találkoztál már a feladattal? Esetleg a mostanítól kissé eltérő formában?
- *Nem ismeresz valami rokon feladatot?* Vagy olyan tételt aminek hasznát vehetnéd?
- *Nézzük csak az ismeretlent!* Próbálj visszaemlékezni valami ismert feladatra, amelyben ugyanez — vagy ehhez hasonló — az ismeretlen.
- *Itt van egy már megoldott rokon feladat. Nem tudnád hasznosítani?* Nem tudnád felhasználni az eredményét? Nem tudnád felhasználni a módszerét? Nem tudnád esetleg valami segédelem bevezetésével felhasználhatóvá tenni?
- Nem tudnád átfogalmazni a feladatot? Nem tudnád másképpen is átfogalmazni? Idézd fel a definíciót!
- Ha nem boldogulsz a kifizűzött feladattal, próbálkozzál először egy rokon feladattal. Nem tudnál kigondolni egy könnyebben megközelíthető rokon feladatot? Egy általánosabb feladatot? Vagy egy speciálisabbat? Vagy egy analóg feladatot? Nem tudnád megoldani legalább a feladat egy részét? Tartsd meg a kikötés egyik részét, a többit ejtsd el. Mennyire van így meghatározva az ismeretlen, mennyiben változhat még? Nem tudnál az adatokból valami hasznosat levezetni? Nem tudnál mondani más adatokat, amelyek alkalmasak az ismeretlen meghatározására? Meg tudnád úgy változtatni az ismeretlent vagy az adatokat, vagy ha szükséges, mind a kettőt, hogy az új ismeretlen és az új adatok közelebb essenek egymáshoz?
- Felhasználtál minden adatot? Számításba vetted az egész kikötést? Számbavetted a feladatban előforduló összes lényeges fogalmat?

TERVÜNK VÉGREHAJTÁSA

- *Ellenőrizz minden lépést,* amikor végrehajtod tervedet. Bizonyos vagy benne, hogy a lépés helyes? Be is tudnád bizonyítani, hogy helyes?

A MEGOLDÁS VIZSGÁLATA

- Nem tudnád *ellenőrizni az eredményt?* Nem tudnád ellenőrizni a bizonyítást?
- Nem tudnád másképpen is levezetni az eredményt? Nem tudnád az eredményt egyetlen pillantásra belátni?
- Nem tudnád alkalmazni az eredményt vagy a módszert valami más feladat megoldására?

Oldjuk meg a következő két feladatot heurisztikus módon!

- „A heurisztikus okoskodás olyan okoskodás, amely nem végleges és szigorú, hanem csak átmeneti és plauzibilis: célja a kitűzött feladat megoldása. Gyakran kényszerülünk heurisztikus megoldás alkalmazására. Egy ízléssel és őszintén megadott heurisztikus bizonyításhasznos lehet: előkészítheti a szigorú bizonyítást, amelynek bizonyos csíráit rendszerint tartalmazza.”
 1. Határozzuk meg egy homogén tetraéder súlypontját!
 2. Gömb felszínének meghatározása

A heurisztika egyéb alkalmazási területei:

- Pszichológia
- Döntéshozatali folyamatok
- Oktatási módszer
- Retorika
- Művészettörténet

Felhasznált irodalom:

- Dr. Kántor Sándorné DE Matematikai Intézet:

Pólya György (1887—1985) A modern matematikai heurisztika megalkotója

- Wikipédia
- Pólya György : A gondolkodás iskolája

Köszönöm a figyelmet!