

Differenciálegyenletek

BerzeTÖK Tábor

Kupás Vendel Péter

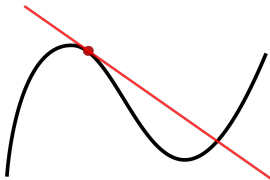
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Akalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

Csevice Erdei Iskola, Parádfürdő, 2025.07.11.

- Egy függvény deriváltja a megváltozásának a mértéke.
- Egy függvény x helyen vett deriváltja a függvénygrafikon x helyen behúzott érintőjének a meredeksége.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

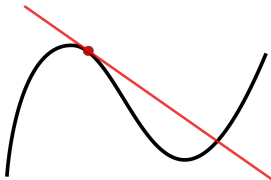
- Egy függvény deriváltja a megváltozásának a mértéke.
- Egy függvény x helyen vett deriváltja a függvénygrafikon x helyen behúzott érintőjének a meredeksége.



Derivált

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

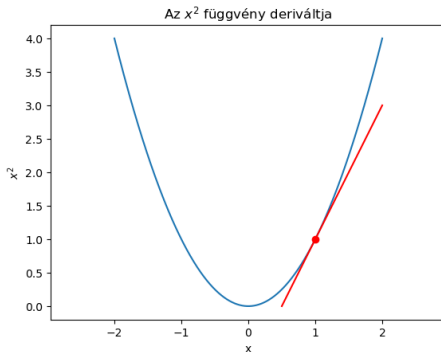
- Egy függvény deriváltja a megváltozásának a mértéke.
- Egy függvény x helyen vett deriváltja a függvénygrafikon x helyen behúzott érintőjének a meredeksége.



Derivált

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$(x^2)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x+h)}{h} = 2x$$



- Mi az átlagsebesség?

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

- Mi a pillanatnyi sebesség?

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = x'(t)$$

- Mi a gyorsulás?

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = v'(t) = x''(t)$$

- Mi az átlagsebesség?

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

- Mi a pillanatnyi sebesség?

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = x'(t)$$

- Mi a gyorsulás?

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = v'(t) = x''(t)$$

- Mi az átlagsebesség?

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

- Mi a pillanatnyi sebesség?

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = x'(t)$$

- Mi a gyorsulás?

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = v'(t) = x''(t)$$

- Mi az átlagsebesség?

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

- Mi a pillanatnyi sebesség?

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = x'(t)$$

- Mi a gyorsulás?

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = v'(t) = x''(t)$$

- Mi az átlagsebesség?

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

- Mi a pillanatnyi sebesség?

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = x'(t)$$

- Mi a gyorsulás?

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = v'(t) = x''(t)$$

- Mi az átlagsebesség?

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

- Mi a pillanatnyi sebesség?

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = x'(t)$$

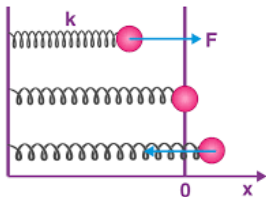
- Mi a gyorsulás?

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = v'(t) = x''(t)$$

Harmonikus rezgőmozgás

- Lineáris erőtvény

$$F = -Dx$$



- Newton második törvénye

$$F(t) = ma(t) = mx''(t)$$

$$mx''(t) = -Dx(t)$$

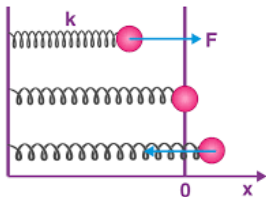
$$x(0) = x_0$$

$$x'(0) = v_0$$

Harmonikus rezgőmozgás

- Lineáris erőtvény

$$F = -Dx$$



- Newton második törvénye

$$F(t) = ma(t) = mx''(t)$$

$$mx''(t) = -Dx(t)$$

$$x(0) = x_0$$

$$x'(0) = v_0$$

Radioaktív bomlás

- Egy részecske ugyanakkora valószínűséggel bomlik el bármelyik időpontban.
- Az időegység alatt bekövetkezett bomlások száma egyenesen arányos a részecskék aktuális számával.

$$N(t+h) - N(t) \approx -h\lambda N(t)$$

$$\frac{N(t+h) - N(t)}{h} \approx -\lambda N(t)$$

$$N'(t) = -\lambda N(t)$$

$$N(0) = N_0$$

- Megoldás:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} = \frac{N_0}{2^{\frac{\lambda}{\ln 2} t}} = \frac{N_0}{2^{\frac{t}{T_{1/2}}}}$$

Radioaktív bomlás

- Egy részecske ugyanakkora valószínűséggel bomlik el bármelyik időpontban.
- Az időegység alatt bekövetkezett bomlások száma egyenesen arányos a részecskék aktuális számával.

$$N(t+h) - N(t) \approx -h\lambda N(t)$$

$$\frac{N(t+h) - N(t)}{h} \approx -\lambda N(t)$$

$$N'(t) = -\lambda N(t)$$

$$N(0) = N_0$$

- Megoldás:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} = \frac{N_0}{2^{\frac{\lambda}{\ln 2} t}} = \frac{N_0}{2^{\frac{t}{T_{1/2}}}}$$

Radioaktív bomlás

- Egy részecske ugyanakkora valószínűséggel bomlik el bármelyik időpontban.
- Az időegység alatt bekövetkezett bomlások száma egyenesen arányos a részecskék aktuális számával.

$$N(t+h) - N(t) \approx -h\lambda N(t)$$

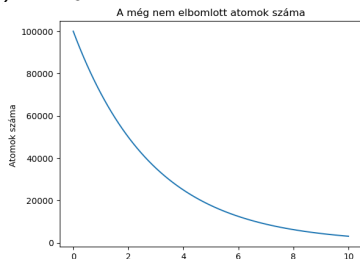
$$\frac{N(t+h) - N(t)}{h} \approx -\lambda N(t)$$

$$N'(t) = -\lambda N(t)$$

$$N(0) = N_0$$

- Megoldás:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} = \frac{N_0}{2^{\frac{\lambda}{\ln 2} t}} = \frac{N_0}{2^{\frac{t}{T_{1/2}}}}$$



- A differenciálegyenlet egy olyan egyenlet, ahol az ismeretlen egy függvény és az egyenlet a függvény és a deriváltjai között teremt kapcsolatot.

$$u'(t) = f(t, u(t))$$

- Kezdetiérték-probléma:

$$u'(t) = t^2 + t \cos(u(t)), \quad t \in [0, T]$$

$$u(0) = 0$$

- A differenciálegyenlet egy olyan egyenlet, ahol az ismeretlen egy függvény és az egyenlet a függvény és a deriváltjai között teremt kapcsolatot.

$$u'(t) = f(t, u(t))$$

- Kezdetiérték-probléma:

$$u'(t) = t^2 + t \cos(u(t)), \quad t \in [0, T]$$

$$u(0) = 0$$

- A differenciálegyenlet egy olyan egyenlet, ahol az ismeretlen egy függvény és az egyenlet a függvény és a deriváltjai között teremt kapcsolatot.

$$u'(t) = f(t, u(t))$$

- Kezdetiérték-probléma:

$$u'(t) = t^2 + t \cos(u(t)), \quad t \in [0, T]$$

$$u(0) = 0$$

- A megoldás nem mindig egyértelmű

$$u'(t) = u(t)^{\frac{2}{3}}, \quad t \geq 0$$
$$u(0) = -\frac{1}{27}$$

- Két különböző megoldás

$$u(t) = \left(\frac{t-1}{3}\right)^3, \quad 1 \leq t$$
$$u(t) = \begin{cases} \left(\frac{t-1}{3}\right)^3, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & 1 \leq t \end{cases}$$

- Ha f globálisan Lipschitz folytonos a második változóban, akkor a megoldás egyértelmű a $[0, T]$ intervallumon
- Általános esetben nem tudjuk megmondani a megoldást zárt alakban.
- Speciális esetek: Szeparábilis, Bernoulli, Ricatti, Euler

- A megoldás nem mindig egyértelmű

$$u'(t) = u(t)^{\frac{2}{3}}, \quad t \geq 0$$
$$u(0) = -\frac{1}{27}$$

- Két különböző megoldás

$$u(t) = \left(\frac{t-1}{3}\right)^3, \quad 1 \leq t$$
$$u(t) = \begin{cases} \left(\frac{t-1}{3}\right)^3, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & 1 \leq t \end{cases}$$

- Ha f globálisan Lipschitz folytonos a második változóban, akkor a megoldás egyértelmű a $[0, T]$ intervallumon
- Általános esetben nem tudjuk megmondani a megoldást zárt alakban.
- Speciális esetek: Szeparábilis, Bernoulli, Ricatti, Euler

- A megoldás nem mindig egyértelmű

$$u'(t) = u(t)^{\frac{2}{3}}, \quad t \geq 0$$
$$u(0) = -\frac{1}{27}$$

- Két különböző megoldás

$$u(t) = \left(\frac{t-1}{3}\right)^3, \quad 1 \leq t$$
$$u(t) = \begin{cases} \left(\frac{t-1}{3}\right)^3, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & 1 \leq t \end{cases}$$

- Ha f globálisan Lipschitz folytonos a második változóban, akkor a megoldás egyértelmű a $[0, T]$ intervallumon
- Általános esetben nem tudjuk megmondani a megoldást zárt alakban.
- Speciális esetek: Szeparábilis, Bernoulli, Ricatti, Euler

Numerikus megoldás

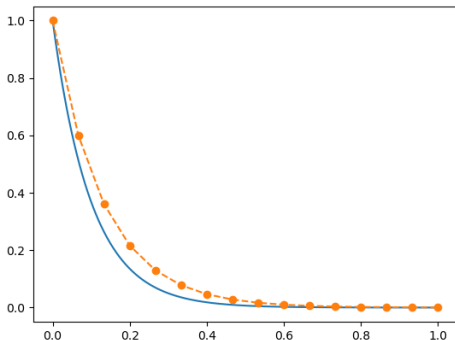
- Vegyük a $[0, T]$ intervallum egy felosztását

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = T$$

- Gyakran állandó lépsközű idődiszkretizálást veszünk

$$t_{n+1} - t_n = h = \frac{T}{N}$$

$$u_n \approx u(t_n)$$



$$u'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(t+h) - u(t)}{h}$$

- Tehát a deriválnak egy közelítését adja a következő formula

$$f(t_n, u(t_n)) = u'(t_n) \approx \frac{u(t_{n+1}) - u(t_n)}{h}$$

- Az így generált numerikus módszer

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1} - u_n}{h} &= f(t_n, u_n), \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \\ u_{n+1} &= u_n + hf(t_n, u_n), \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned}$$

$$u'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(t) - u(t-h)}{h}$$

- Tehát a deriválnak egy közelítését adja a következő formula

$$f(t_{n+1}, u(t_{n+1})) = u'(t_{n+1}) \approx \frac{u(t_{n+1}) - u(t_n)}{h}$$

- Az így generált numerikus módszer

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1} - u_n}{h} &= f(t_{n+1}, u_{n+1}), \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \\ u_{n+1} &= u_n + hf(t_{n+1}, u_{n+1}), \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned}$$

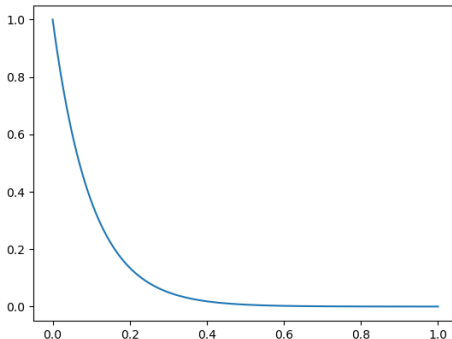
Dahlquist teszt feladat

$$u'(t) = \lambda u(t)$$

$$u(0) = u_0$$

- Megoldás

$$u(t) = u_0 e^{\lambda t}$$



- Ha $\lambda < 0$, akkor a megoldás 0-hoz tart és pozitív

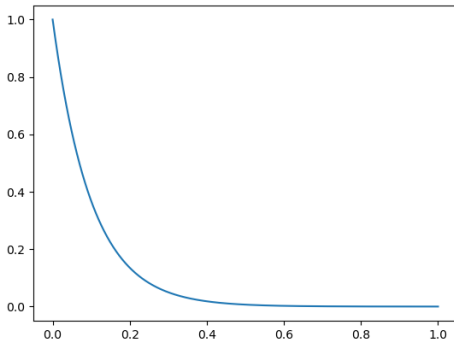
Dahlquist teszt feladat

$$u'(t) = \lambda u(t)$$

$$u(0) = u_0$$

- Megoldás

$$u(t) = u_0 e^{\lambda t}$$



- Ha $\lambda < 0$, akkor a megoldás 0-hoz tart és pozitív

Dahlquist teszt feladat

$$u_{n+1} = u_n + h\lambda u_n$$

$$u_{n+1} = (1 + h\lambda)u_n$$

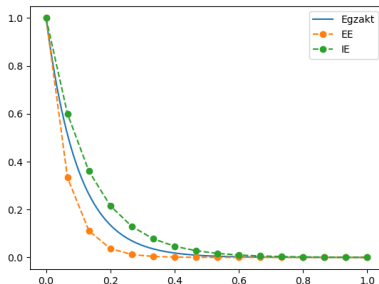
- Ha $h \leq -\frac{2}{\lambda}$, akkor a megoldás 0-hoz tart
- Ha $h \leq -\frac{1}{\lambda}$, akkor a megoldás pozitív

$$u_{n+1} = u_n + h\lambda u_{n+1}$$

$$u_{n+1} = \frac{1}{1 - h\lambda} u_n$$

- Minden $h > 0$ esetén

$$0 < \frac{1}{1 - h\lambda} < 1$$



Dahlquist teszt feladat

$$u_{n+1} = u_n + h\lambda u_n$$

$$u_{n+1} = (1 + h\lambda)u_n$$

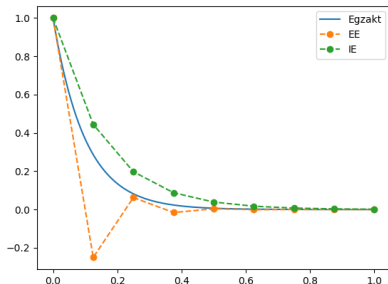
- Ha $h \leq -\frac{2}{\lambda}$, akkor a megoldás 0-hoz tart
- Ha $h \leq -\frac{1}{\lambda}$, akkor a megoldás pozitív

$$u_{n+1} = u_n + h\lambda u_{n+1}$$

$$u_{n+1} = \frac{1}{1 - h\lambda} u_n$$

- Minden $h > 0$ esetén

$$0 < \frac{1}{1 - h\lambda} < 1$$



Dahlquist teszt feladat

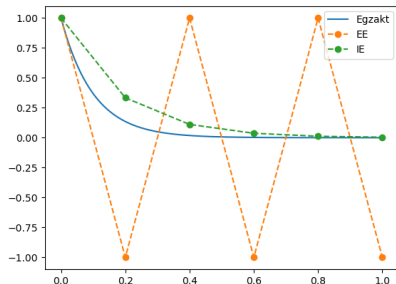
$$u_{n+1} = u_n + h\lambda u_n$$
$$u_{n+1} = (1 + h\lambda)u_n$$

- Ha $h \leq -\frac{2}{\lambda}$, akkor a megoldás 0-hoz tart
- Ha $h \leq -\frac{1}{\lambda}$, akkor a megoldás pozitív

$$u_{n+1} = u_n + h\lambda u_{n+1}$$
$$u_{n+1} = \frac{1}{1 - h\lambda} u_n$$

- Minden $h > 0$ esetén

$$0 < \frac{1}{1 - h\lambda} < 1$$



- x_{n+1} csak az x_n értéktől függ

$$u_{n+1} = \Phi(u_n)$$

- A módszer p -ed rendben konzisztens, ha egy lépés során a pontos megoldásból indulva nagyságrendileg h^{p+1} hibát követünk el

$$u(t_{n+1}) = \Phi(u(t_n)) + \mathcal{O}(h^{p+1})$$

- Runge-Kutta módszerek

- x_{n+1} csak az x_n értéktől függ

$$u_{n+1} = \Phi(u_n)$$

- A módszer p -ed rendben konzisztens, ha egy lépés során a pontos megoldásból indulva nagyságrendileg h^{p+1} hibát követünk el

$$u(t_{n+1}) = \Phi(u(t_n)) + \mathcal{O}(h^{p+1})$$

- Runge-Kutta módszerek

Egylépéses módszerek

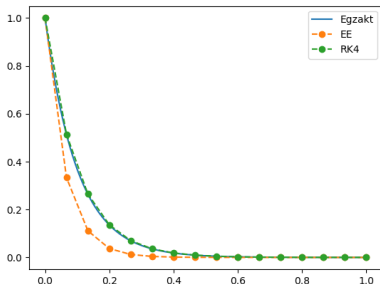
- x_{n+1} csak az x_n értéktől függ

$$u_{n+1} = \Phi(u_n)$$

- A módszer p -ed rendben konzisztens, ha egy lépés során a pontos megoldásból indulva nagyságrendileg h^{p+1} hibát követünk el

$$u(t_{n+1}) = \Phi(u(t_n)) + \mathcal{O}(h^{p+1})$$

- Runge-Kutta módszerek



Megmaradási egyenlet

- Ha a keresett függvény nem csak az időtől függ és az egyenletben parciális deriváltak szerepelnek, akkor parciális differenciálegyenletről beszélünk
- Tegyük fel, hogy $u(t, x)$ ($t \geq 0, x \in \mathbb{R}$) egy megmaradó mennyiség térbeli eloszlásának időbeli változását írja le
- Legyen $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ az u mozgását leíró fluxus

$$\begin{aligned}\int_a^b u(t + \delta, x) \, dx - \int_a^b u(t, x) \, dx &= \int_t^{t+\delta} F(u(s, a)) \, ds - \int_t^{t+\delta} F(u(s, b)) \, ds \\ \int_a^b \frac{u(t + \delta, x) - u(t, x)}{\delta} \, dx &= \frac{\int_t^{t+\delta} F(u(s, a)) \, ds}{\delta} - \frac{\int_t^{t+\delta} F(u(s, b)) \, ds}{\delta} \\ \int_a^b \partial_t u(t, x) \, dx &= F(u(t, a)) - F(u(t, b)) = - \int_a^b \partial_x (F(u(t, x))) \, dx \\ \partial_t u(t, x) + \partial_x (F(u(t, x))) &= 0\end{aligned}$$

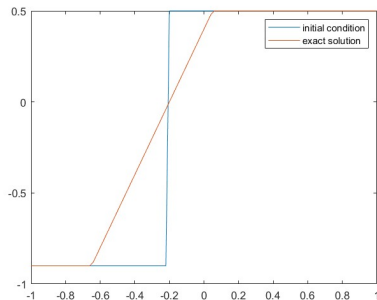
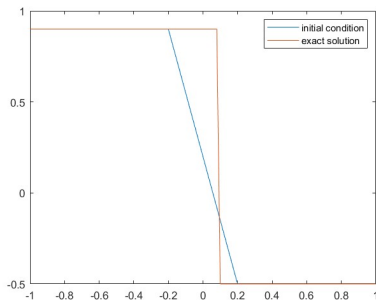
Megmaradási egyenlet

- Ha a keresett függvény nem csak az időtől függ és az egyenletben parciális deriváltak szerepelnek, akkor parciális differenciálegyenletről beszélünk
- Tegyük fel, hogy $u(t, x)$ ($t \geq 0, x \in \mathbb{R}$) egy megmaradó mennyiség térbeli eloszlásának időbeli változását írja le
- Legyen $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ az u mozgását leíró fluxus

$$\begin{aligned}\int_a^b u(t + \delta, x) \, dx - \int_a^b u(t, x) \, dx &= \int_t^{t+\delta} F(u(s, a)) \, ds - \int_t^{t+\delta} F(u(s, b)) \, ds \\ \int_a^b \frac{u(t + \delta, x) - u(t, x)}{\delta} \, dx &= \frac{\int_t^{t+\delta} F(u(s, a)) \, ds}{\delta} - \frac{\int_t^{t+\delta} F(u(s, b)) \, ds}{\delta} \\ \int_a^b \partial_t u(t, x) \, dx &= F(u(t, a)) - F(u(t, b)) = - \int_a^b \partial_x (F(u(t, x))) \, dx \\ \partial_t u(t, x) + \partial_x (F(u(t, x))) &= 0\end{aligned}$$

Burgers' egyenlet

$$F(u) = \frac{u^2}{2}$$



Köszönöm a figyelmet!