

Numerikus módszerek

BerzeTÖK Tábor

Kupás Vendel Péter

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Akalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

Csevice Erdei Iskola, Parádfürdő, 2025.07.10.

Elméleti és alkalmazott matematika

	Elméleti	Alkalmazott
Cél	Logikai összefüggések feltárása, igazság keresése	Gyakorlati problémák megoldása
Motiváció	Esztétika, Szépség	Alkalmazhatóság
Módszer	Axiomatikus felépítés, formális bizonyítások	Modellalkotás, szimuláció, numerikus számítás
Valósághoz való viszony	független	szorosan kötődik
Példák	Algebra, topológia, logika, számelmélet	Operációkutatás, Numerikus analízis

- „A matematika nem öncél, hanem az emberi szellem egy olyan formája, amelynek értéke minden más formán túlmutat.”
- „Az elmélet és a gyakorlat között annyi a különbség, hogy elméletben nincs különbség köztük, de gyakorlatban van.”
- „A tiszta matematika, ahogy azt eddig művelték, többé már nem elég a matematika életben tartásához. Egyre inkább úgy tűnik, hogy csak az alkalmazott matematika tud új életet lehelni belé.” (Neumann János)

Elméleti és alkalmazott matematika

	Elméleti	Alkalmazott
Cél	Logikai összefüggések feltárása, igazság keresése	Gyakorlati problémák megoldása
Motiváció	Esztétika, Szépség	Alkalmazhatóság
Módszer	Axiomatikus felépítés, formális bizonyítások	Modellalkotás, szimuláció, numerikus számítás
Valósághoz való viszony	független	szorosan kötődik
Példák	Algebra, topológia, logika, számelmélet	Operációkutatás, Numerikus analízis

- „A matematika nem öncél, hanem az emberi szellem egy olyan formája, amelynek értéke minden más formán túlmutat.”
- „Az elmélet és a gyakorlat között annyi a különbség, hogy elméletben nincs különbség köztük, de gyakorlatban van.”
- „A tiszta matematika, ahogy azt eddig művelték, többé már nem elég a matematika életben tartásához. Egyre inkább úgy tűnik, hogy csak az alkalmazott matematika tud új életet lehelni belé.” (Neumann János)

Elméleti és alkalmazott matematika

	Elméleti	Alkalmazott
Cél	Logikai összefüggések feltárása, igazság keresése	Gyakorlati problémák megoldása
Motiváció	Esztétika, Szépség	Alkalmazhatóság
Módszer	Axiomatikus felépítés, formális bizonyítások	Modellalkotás, szimuláció, numerikus számítás
Valósághoz való viszony	független	szorosan kötődik
Példák	Algebra, topológia, logika, számelmélet	Operációkutatás, Numerikus analízis

- „A matematika nem öncél, hanem az emberi szellem egy olyan formája, amelynek értéke minden más formán túlmutat.”
- „Az elmélet és a gyakorlat között annyi a különbség, hogy elméletben nincs különbség köztük, de gyakorlatban van.”
- „A tiszta matematika, ahogy azt eddig művelték, többé már nem elég a matematika életben tartásához. Egyre inkább úgy tűnik, hogy csak az alkalmazott matematika tud új életet lehelni belé.” (Neumann János)

	Elméleti	Alkalmazott
Cél	Logikai összefüggések feltárása, igazság keresése	Gyakorlati problémák megoldása
Motiváció	Esztétika, Szépség	Alkalmazhatóság
Módszer	Axiomatikus felépítés, formális bizonyítások	Modellalkotás, szimuláció, numerikus számítás
Valósághoz való viszony	független	szorosan kötődik
Példák	Algebra, topológia, logika, számelmélet	Operációkutatás, Numerikus analízis

- „A matematika nem öncél, hanem az emberi szellem egy olyan formája, amelynek értéke minden más formán túlmutat.”
- „Az elmélet és a gyakorlat között annyi a különbség, hogy elméletben nincs különbség köztük, de gyakorlatban van.”
- „A tiszta matematika, ahogy azt eddig művelték, többé már nem elég a matematika életben tartásához. Egyre inkább úgy tűnik, hogy csak az alkalmazott matematika tud új életet lehelni belé.” (Neumann János)

Mit tudunk kiszámolni?

- Algoritmus $\sim$ Turing-gép
- Church–Turing tézis
- Eldönthetetlen problémák:
 - Leállási probléma
 - Diofantoszi egyenletek
- Egy probléma polinomiális időben kiszámolható, ha létezik $C \in \mathbb{R}$ és $k \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ hosszú input esetén a futási idő $< Cn^k$.
- P : polinomiális időben kiszámolható problémák halmaza (Euler-kör)
- NP : polinomiális időben ellenőrizhető problémák halmaza (Hamilton-kör, faktorizálás)

$$P \stackrel{?}{=} NP$$

Mit tudunk kiszámolni?

- Algoritmus $\sim$ Turing-gép
- Church–Turing tézis
- Eldönthetetlen problémák:
 - Leállási probléma
 - Diofantoszi egyenletek
- Egy probléma polinomiális időben kiszámolható, ha létezik $C \in \mathbb{R}$ és $k \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ hosszú input esetén a futási idő $< Cn^k$.
- P : polinomiális időben kiszámolható problémák halmaza (Euler-kör)
- NP : polinomiális időben ellenőrizhető problémák halmaza (Hamilton-kör, faktorizálás)

$$P \stackrel{?}{=} NP$$

Mit tudunk kiszámolni?

- Algoritmus $\sim$ Turing-gép
- Church–Turing tézis
- Eldönthetetlen problémák:
 - Leállási probléma
 - Diofantoszi egyenletek
- Egy probléma polinomiális időben kiszámolható, ha létezik $C \in \mathbb{R}$ és $k \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ hosszú input esetén a futási idő $< Cn^k$.
- P : polinomiális időben kiszámolható problémák halmaza (Euler-kör)
- NP : polinomiális időben ellenőrizhető problémák halmaza (Hamilton-kör, faktorizálás)

$$P \stackrel{?}{=} NP$$

Mit tudunk kiszámolni?

- Algoritmus $\sim$ Turing-gép
- Church–Turing tézis
- Eldönthetetlen problémák:
 - Leállási probléma
 - Diofantoszi egyenletek
- Egy probléma polinomiális időben kiszámolható, ha létezik $C \in \mathbb{R}$ és $k \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ hosszú input esetén a futási idő $< Cn^k$.
- P : polinomiális időben kiszámolható problémák halmaza (Euler-kör)
- NP : polinomiális időben ellenőrizhető problémák halmaza (Hamilton-kör, faktorizálás)

$$P \stackrel{?}{=} NP$$

Mikor tudjuk megadni a pontos megoldást?

$$x^2 - 9x + 20 = 0$$

$$x^5 - x - 1 = 0$$

- **Abel-Ruffin tétel (1813,1824):** Nem létezik megoldóképlet az ötödfokú polinomokra.

$$\sin(x) - x = 0$$

$$2 \sin(x) - x = 0$$

$$\min_{x \in [-1,1]} x^6 - 3x^2 - 6x$$

Mi a $\sqrt{2}$ tizedestört alakja?

Mikor tudjuk megadni a pontos megoldást?

$$x^2 - 9x + 20 = 0$$

$$x^5 - x - 1 = 0$$

- **Abel-Ruffin tétel (1813,1824):** Nem létezik megoldóképlet az ötödfokú polinomokra.

$$\sin(x) - x = 0$$

$$2 \sin(x) - x = 0$$

$$\min_{x \in [-1,1]} x^6 - 3x^2 - 6x$$

Mi a $\sqrt{2}$ tizedestört alakja?

Mikor tudjuk megadni a pontos megoldást?

$$x^2 - 9x + 20 = 0$$

$$x^5 - x - 1 = 0$$

- **Abel-Ruffin tétel (1813,1824):** Nem létezik megoldóképlet az ötödfokú polinomokra.

$$\sin(x) - x = 0$$

$$2 \sin(x) - x = 0$$

$$\min_{x \in [-1,1]} x^6 - 3x^2 - 6x$$

Mi a $\sqrt{2}$ tizedestört alakja?

Mikor tudjuk megadni a pontos megoldást?

$$x^2 - 9x + 20 = 0$$

$$x^5 - x - 1 = 0$$

- **Abel-Ruffin tétel (1813,1824):** Nem létezik megoldóképlet az ötödfokú polinomokra.

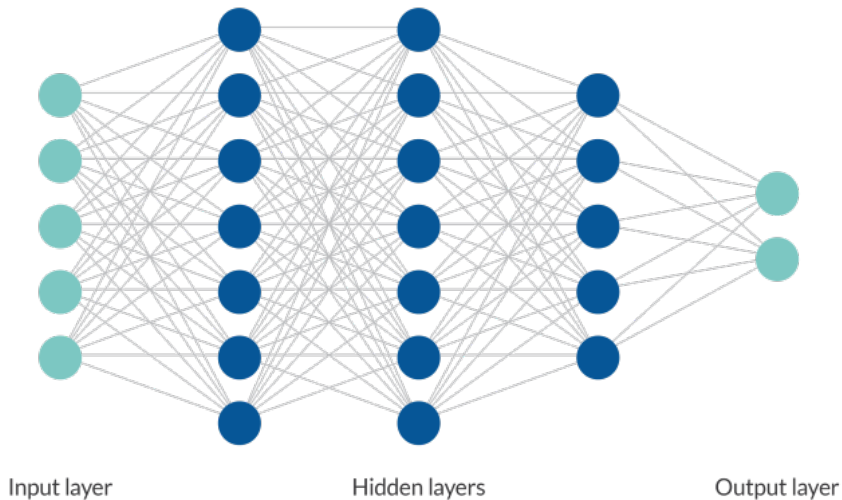
$$\sin(x) - x = 0$$

$$2 \sin(x) - x = 0$$

$$\min_{x \in [-1,1]} x^6 - 3x^2 - 6x$$

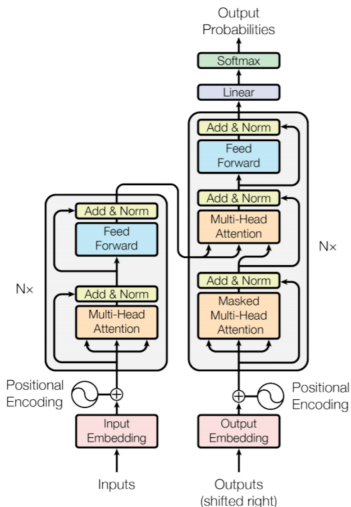
Mi a $\sqrt{2}$ tizedestört alakja?

Neurális hálózatok

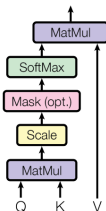


ChatGPT architektúra

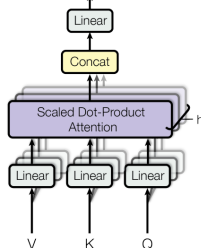
- Transzformer architektúra
- Figyelem mechanizmus
- ChatGPT 4o: 1.7 billió paraméter



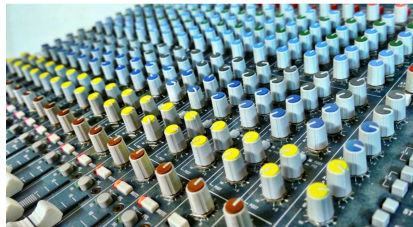
Scaled Dot-Product Attention



Multi-Head Attention



- Hogyan állítsuk be a súlyokat?
- Tanító adat: (x_i, y_i) párok

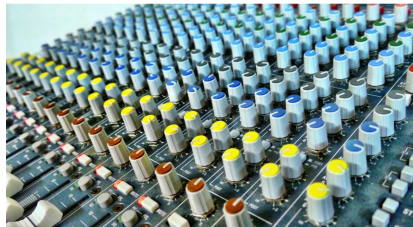


- Hibafüggvény:

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N ||y_i^{out} - y_i||^2$$

- Minél kisebb a hiba, annál pontosabb a neurális háló.
- Cél: A hiba minimalizálása
- Gradiens módszer

- Hogyan állítsuk be a súlyokat?
- Tanító adat: (x_i, y_i) párok

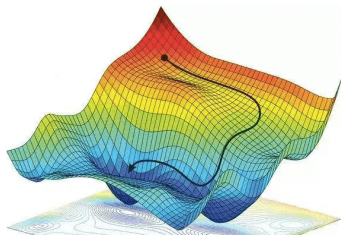


- Hibafüggvény:

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N ||y_i^{out} - y_i||^2$$

- Minél kisebb a hiba, annál pontosabb a neurális háló.
- Cél: A hiba minimalizálása
- Gradiens módszer

- Hogyan állítsuk be a súlyokat?
- Tanító adat: (x_i, y_i) párok

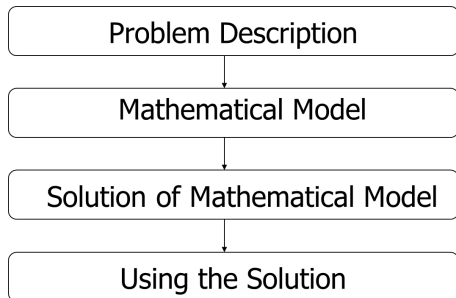


- Hibafüggvény:

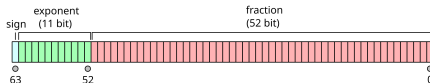
$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N ||y_i^{out} - y_i||^2$$

- Minél kisebb a hiba, annál pontosabb a neurális háló.
- Cél: A hiba minimalizálása
- Gradiens módszer

- Cél: Egyszerű, hatékony eljárások kidolgozása különböző feladatok megoldásainak megadására, közelítésére.
- Számábrázolás, műveletek
- Lineáris egyenletek
- Nemlineáris egyenetek
- Optimalizálás
- Interpoláció
- Regresszió
- Numerikus integrálás
- Differenciálegyenetek



- Cél: Egyszerű, hatékony eljárások kidolgozása különböző feladatok megoldásainak megadására, közelítésére.
- Számábrázolás, műveletek
- Lineáris egyenletek
- Nemlineáris egyenetek
- Optimalizálás
- Interpoláció
- Regresszió
- Numerikus integrálás
- Differenciálegyenetek

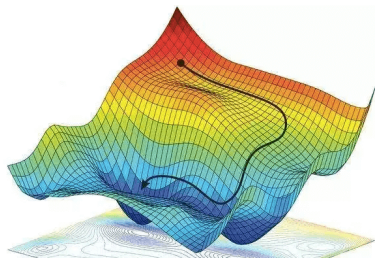


$$\epsilon_0 \approx 10^{-308}$$

$$\epsilon_1 \approx 2.22 \times 10^{-16}$$

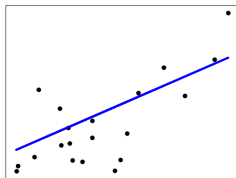
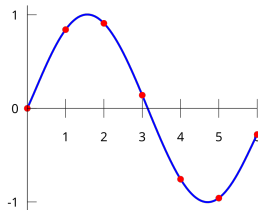
- Cél: Egyszerű, hatékony eljárások kidolgozása különböző feladatok megoldásainak megadására, közelítésére.
 - Számábrázolás, műveletek
 - Lineáris egyenletek
 - Nemlineáris egyenletek
 - Optimalizálás
 - Interpoláció
 - Regresszió
 - Numerikus integrálás
 - Differenciálegyenetek
- $$\begin{array}{r} 3x + 2y = 1 \\ 2x - 5y = 7 \\ \downarrow \\ \begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 7 \end{array} \\ Ax = b \end{array}$$
- Gauss-elimináció: $\mathcal{O}(N^3)$
 - Jacobi-iteráció: $\mathcal{O}(k \times N^2)$

- Cél: Egyszerű, hatékony eljárások kidolgozása különböző feladatok megoldásainak megadására, közelítésére.
- Számábrázolás, műveletek
- Lineáris egyenletek
- Nemlineáris egyenetek
- Optimalizálás
- Interpoláció
- Regresszió
- Numerikus integrálás
- Differenciálegyenetek



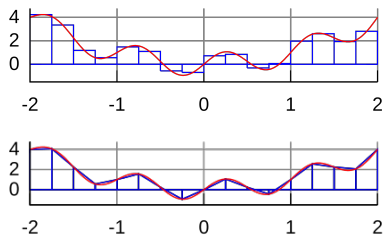
- Cél: Egyszerű, hatékony eljárások kidolgozása különböző feladatok megoldásainak megadására, közelítésére.

- Számábrázolás, műveletek
- Lineáris egyenletek
- Nemlineáris egyenetek
- Optimalizálás
- Interpoláció
- Regresszió
- Numerikus integrálás
- Differenciálegyenetek

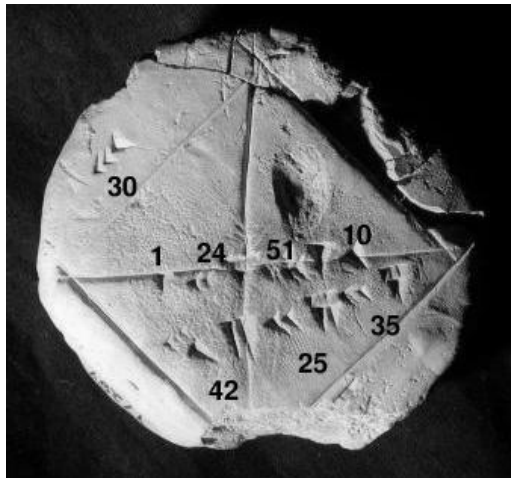


- Cél: Egyszerű, hatékony eljárások kidolgozása különböző feladatok megoldásainak megadására, közelítésére.
- Számábrázolás, műveletek
- Lineáris egyenletek
- Nemlineáris egyenletek
- Optimalizálás
- Interpoláció
- Regresszió
- Numerikus integrálás
- Differenciálegyenetek

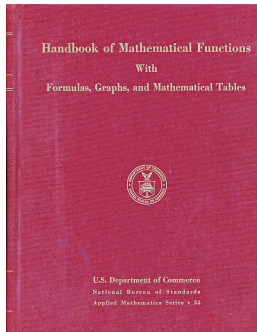
$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$



- Táblázatok
- Számológépek
- Számítógépek

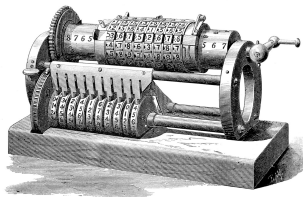


- Táblázatok
- Számológépek
- Számítógépek



x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	5000	5040	5080	5120	5160	5199	5239	5279	5319	5359
0.1	5398	5438	5478	5517	5557	5596	5636	5675	5714	5753
0.2	5793	5832	5871	5910	5948	5987	6026	6064	6103	6141
0.3	6179	6217	6255	6293	6331	6368	6406	6443	6480	6517
0.4	6554	6591	6628	6664	6700	6736	6772	6808	6844	6879
0.5	6915	6950	6985	7019	7054	7088	7123	7157	7190	7224
0.6	7257	7291	7324	7357	7389	7422	7454	7486	7517	7549
0.7	7580	7611	7642	7673	7704	7734	7764	7794	7823	7852
0.8	7881	7910	7939	7967	7995	8023	8051	8078	8106	8133
0.9	8159	8186	8212	8238	8264	8289	8315	8340	8365	8389
1.0	8413	8438	8461	8485	8508	8531	8554	8577	8599	8621
1.1	8643	8665	8686	8708	8729	8749	8770	8790	8810	8830
1.2	8849	8869	8888	8907	8925	8944	8962	8980	8997	9015
1.3	9032	9049	9066	9082	9099	9115	9131	9147	9162	9177
1.4	9192	9207	9222	9236	9251	9265	9279	9292	9306	9319
1.5	9332	9345	9357	9370	9382	9394	9406	9418	9429	9441
1.6	9452	9463	9474	9484	9495	9505	9515	9525	9535	9545
1.7	9554	9564	9573	9582	9591	9599	9608	9616	9625	9633
1.8	9641	9649	9656	9664	9671	9678	9686	9693	9699	9706
1.9	9713	9719	9726	9732	9738	9744	9750	9756	9761	9767
2.0	9772	9778	9783	9788	9793	9798	9803	9808	9812	9817
2.1	9821	9826	9830	9834	9838	9842	9846	9850	9854	9857
2.2	9861	9864	9868	9871	9875	9878	9881	9884	9887	9890
2.3	9893	9896	9898	9901	9904	9906	9909	9911	9913	9916
2.4	9918	9920	9922	9925	9927	9929	9931	9932	9934	9936
2.5	9938	9940	9941	9943	9945	9946	9948	9949	9951	9952
2.6	9953	9955	9956	9957	9959	9960	9961	9962	9963	9964
2.7	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974
2.8	9974	9975	9976	9977	9977	9978	9979	9979	9980	9981
2.9	9981	9982	9982	9983	9984	9984	9985	9985	9986	9986

- Táblázatok
- Számológépek
- Számítógépek



- Táblázatok
- Számológépek
- Számítógépek



- Cél: A megoldás egyre jobb és jobb közelítése

$$x_{n+1} = x_n - \alpha \nabla f(x_n)$$

- Gyorsan számolható
- Tegyük fel, hogy $x_n \rightarrow x^*$. A módszer konvergencia rendje p , ha létezik $C \in \mathbb{R}$ konstans, hogy

$$|x_{n+1} - x^*| \leq C|x_n - x^*|^p.$$

- Cél: A megoldás egyre jobb és jobb közelítése

$$x_{n+1} = x_n - \alpha \nabla f(x_n)$$

- Gyorsan számolható
- Tegyük fel, hogy $x_n \rightarrow x^*$. A módszer konvergencia rendje p , ha létezik $C \in \mathbb{R}$ konstans, hogy

$$|x_{n+1} - x^*| \leq C|x_n - x^*|^p.$$

- Tegyük fel, hogy adott egy $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény és $a, b \in \mathbb{R}$ számok, hogy $f(a)f(b) < 0$. Ekkor létezik $x \in [a, b]$, ahol $f(x) = 0$.

$$f(x) = x^2 - 2$$

$$a = 1$$

$$b = 2$$

```
def bisection(f,a,b, maxiter):  
    for i in range(maxiter):  
        c = (a+b)/2  
        if f(c) == 0:  
            return c  
        if f(a)*f(c)<0:  
            b = c  
        else:  
            a = c  
    return x
```

- A kapott sorozat

$[1,2] \rightarrow [1,1.5] \rightarrow [1.25,1.5] \rightarrow$
 $\rightarrow [1.375,1.5] \rightarrow [1.375,1.4375]$

- Tegyük fel, hogy adott egy $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény és $a, b \in \mathbb{R}$ számok, hogy $f(a)f(b) < 0$. Ekkor létezik $x \in [a, b]$, ahol $f(x) = 0$.

$$f(x) = x^2 - 2$$

$$a = 1$$

$$b = 2$$

- A kapott sorozat

$$\begin{aligned} [1,2] &\rightarrow [1,1.5] \rightarrow [1.25,1.5] \rightarrow \\ &\rightarrow [1.375,1.5] \rightarrow [1.375,1.4375] \end{aligned}$$

```
def bisection(f,a,b, maxiter):  
    for i in range(maxiter):  
        c = (a+b)/2  
        if f(c) == 0:  
            return c  
        if f(a)*f(c)<0:  
            b = c  
        else:  
            a = c  
    return x
```


- Tegyük fel, hogy a $\varphi : [a, b] \rightarrow [a, b]$ olyan, hogy létezik $q < 1$ szám, hogy minden $x, y \in [a, b]$ esetén $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq q|x - y|$. Ekkor a φ függvénynek létezik pontosan egy fixpontja, azaz létezik $x^* \in [a, b]$, hogy

$$\varphi(x^*) = x^*.$$

- Továbbá minden $x_0 \in [a, b]$ esetén az

$$x_{n+1} = \varphi(x_n)$$

sorozat x^* -hoz konvergál és

$$|x_{n+1} - x^*| \leq q|x_n - x^*|.$$

```
def simple_iter(phi,x0,maxiter):  
    x = x0  
    for i in range(maxiter):  
        x = phi(x)  
    return x
```

Egyszerű iteráció

$$x^2 - 2 = 0$$

$$x = \frac{2}{x}$$

$$\varphi(x) = \frac{2}{x}$$

φ nem kontrakció

$$x^2 - 2 = 0$$

$$x^2 - x - 2 = -x$$

$$(x - 2)(x + 1) = -x$$

$$x = 2 - \frac{x}{x + 1}$$

$$x = 1 + \frac{1}{x + 1}$$

$$\varphi(x) = 1 + \frac{1}{x + 1}$$

φ kontrakció

$$q = \frac{1}{2}, \quad p = 1$$

$$x^2 - 2 = 0$$

$$2x^2 = x^2 + 2$$

$$x = \frac{x^2 + 2}{2x}$$

$$x = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$$

$$\varphi(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$$

φ kontrakció

$$q = \frac{1}{2}, \quad p = 2$$

$$|x_4 - \sqrt{2}| \approx 4.2 \times 10^{-4} \quad |x_4 - \sqrt{2}| \approx 1.6 \times 10^{-12}$$

Egyszerű iteráció

$$x^2 - 2 = 0$$

$$x = \frac{2}{x}$$

$$\varphi(x) = \frac{2}{x}$$

φ nem kontrakció

$$x^2 - 2 = 0$$

$$x^2 - x - 2 = -x$$

$$(x - 2)(x + 1) = -x$$

$$x = 2 - \frac{x}{x + 1}$$

$$x = 1 + \frac{1}{x + 1}$$

$$\varphi(x) = 1 + \frac{1}{x + 1}$$

φ kontrakció

$$q = \frac{1}{2}, \quad p = 1$$

$$|x_4 - \sqrt{2}| \approx 4.2 \times 10^{-4}$$

$$x^2 - 2 = 0$$

$$2x^2 = x^2 + 2$$

$$x = \frac{x^2 + 2}{2x}$$

$$x = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$$

$$\varphi(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$$

φ kontrakció

$$q = \frac{1}{2}, \quad p = 2$$

$$|x_4 - \sqrt{2}| \approx 1.6 \times 10^{-12}$$

Egyszerű iteráció

$$x^2 - 2 = 0$$

$$x = \frac{2}{x}$$

$$\varphi(x) = \frac{2}{x}$$

φ nem kontrakció

$$x^2 - 2 = 0$$

$$x^2 - x - 2 = -x$$

$$(x - 2)(x + 1) = -x$$

$$x = 2 - \frac{x}{x + 1}$$

$$x = 1 + \frac{1}{x + 1}$$

$$\varphi(x) = 1 + \frac{1}{x + 1}$$

φ kontrakció

$$x^2 - 2 = 0$$

$$2x^2 = x^2 + 2$$

$$x = \frac{x^2 + 2}{2x}$$

$$x = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$$

$$\varphi(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$$

φ kontrakció

$$q = \frac{1}{2}, \quad p = 1$$

$$q = \frac{1}{2}, \quad p = 2$$

$$|x_4 - \sqrt{2}| \approx 4.2 \times 10^{-4} \quad |x_4 - \sqrt{2}| \approx 1.6 \times 10^{-12}$$

Newton módszer

- Az érintő egyenlete az x_n pontban

$$y = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n)$$

- Legyen x_{n+1} az a pont, ahol az érintő metszi az x-tengelyt

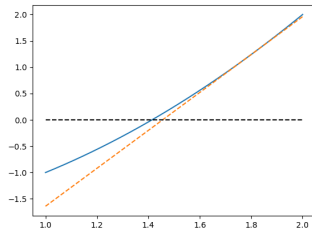
$$f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + f(x_n) = 0$$

$$x_{n+1} - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

- A módszer másodrendben konvergens

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$$



```
def newton_iter(f,fder,x0,maxiter):  
    x = x0  
    for i in range(maxiter):  
        x = x - f(x)/fder(x)  
    return x
```

Newton módszer

- Az érintő egyenlete az x_n pontban

$$y = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n)$$

- Legyen x_{n+1} az a pont, ahol az érintő metszi az x-tengelyt

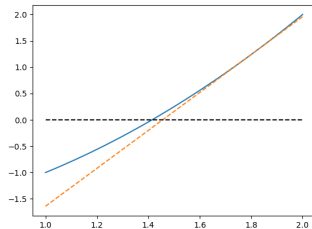
$$f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + f(x_n) = 0$$

$$x_{n+1} - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

- A módszer másodrendben konvergens

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$$



```
def newton_iter(f,fder,x0,maxiter):  
    x = x0  
    for i in range(maxiter):  
        x = x - f(x)/fder(x)  
    return x
```

Köszönöm a figyelmet!