

# Nem-extenzív statisztika.

Boltzmann, Rényi, Tsallis

T.S. Biró<sup>123</sup>

HUN  
REN



<sup>1</sup>NKFIH NAPLIFE fúziós kutatóprogram

Research Centre for Physics, Budapest

<sup>2</sup>Complex Science Hub, Vienna

<sup>3</sup>Babeş-Bolyai Egyetem, Kolozsvár

2026. július 3.



$$x^n + y^n \neq z^n \\ \text{if } n > 2$$



HUN  
REN

Wigner

# A valószínűség

Szerencsejáték, biztosítás, hamisítás leleplezés

Eloszlás - gyakoriság - találati arány - valószínűség - kockázat - várható érték - szórás

$p = 0.1$  jelentése: 1 a 10-ből, vagy 10 a 100-ból, stb.  $\sum_n P_n = 1$ .

PDF:  $P(x)dx = \text{Prob}(y|y \in [x - a, x + b], b + a = dx, dx \rightarrow 0)$ .

Normálás:  $\int P(x)dx = 1$ .

Egyenletes eloszlás  $U = \left\{ \frac{1}{W}, \frac{1}{W}, \dots, \frac{1}{W} \right\}$   $W$  - szer.



# Boltzmann entrópia

szorzatra additív

$$S[P] = \sum_n P_n \log \frac{1}{P_n}, \quad S[U] = \log W. \quad (1)$$

Ha  $P_{A \cup B} = P_A \cdot P_B$  akkor  $S[A \cup B] = S[A] + S[B]$ .

Bizonyosság:  $P_{n1,n2} = p_{n1} \cdot q_{n2}$  és  $\sum_{n1} p_{n1} = 1, \sum_{n2} q_{n2} = 1$ .

$$\begin{aligned} S[P] &= \sum_{n1,n2} p_{n1} q_{n2} \log \frac{1}{p_{n1} q_{n2}} \\ &= - \sum_{n1} p_{n1} \sum_{n2} q_{n2} \log(q_{n2}) - \sum_{n1} p_{n1} \log(p_{n1}) \sum_{n2} q_{n2} \\ &= S[p] + S[q]. \end{aligned} \quad (2)$$



# Boltzmann entrópia

## permutációk

Ismétléses permutációk száma,  $N$  elem,  $W$  állapot rendre  $N_1, N_2, \dots, N_W$  realizációval.

$$\mathcal{N} = \frac{N!}{N_1! \cdot N_2! \cdot \dots \cdot N_W!} \quad (3)$$

Nagy faktoriálisok logaritmus, Stirling:  $\log N! \approx N \log N - N + \mathcal{O}(\log N)$ .

Valószínűség  $P_i = N_i/N$ , Boltzmann (Gibbs, Planck, Shannon) formula

$$\log \mathcal{N} = N \left[ \log N \left( 1 - \sum_{i=1}^W P_i \right) - \sum_{i=1}^W P_i \log P_i \right] + \dots \quad (4)$$



# Rényi entrópia

szorzatra additív

Ezzel a céllal "készült":

$$S_R[P] = \frac{1}{1-q} \log \sum_i P_i^q \quad (5)$$

$q \rightarrow 1$ -re a Boltzmann entrópia.

Additivitás,  $P_n = p_{n1} \cdot r_{n2}$  miatt  $\sum_{n1} \sum_{n2} P_{n1,n2}^q = \left( \sum_{n1} p_{n1}^q \right) \cdot \left( \sum_{n2} r_{n2}^q \right)$ .

$$S_R[P] = \frac{1}{1-q} \left[ \log \sum_{n1} p_{n1}^q + \log \sum_{n2} r_{n2}^q \right] = S_R[p] + S_R[r]. \quad (6)$$

Az egyenletes eloszlás entrópiája:  $S_R[U] = \log W$ .



# Tsallis entrópia

szorzatra nem additív, nem szorzatra additív

Itt is van egy  $q$  paraméter, ez nem additív, de várható érték. Képlete

$$S_T[P] = \frac{1}{1-q} \sum_i (P_i^q - P_i), \quad S_T[U] = \frac{1}{1-q} (W^{1-q} - 1) \quad (7)$$

Kompozíciós szabály (Sumiyoshi Abe), alapja  $\sum_i p_i^q = 1 + (1-q)S_T[p]$ .

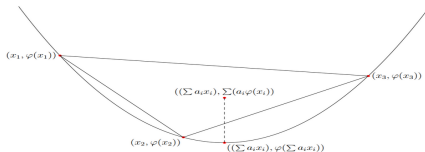
$$S_T[P] = S_T[p] + S_T[q] + (1-q)S_T[p] \cdot S_T[q]. \quad (8)$$

Példa: a százalékok nem adódnak össze, a fentihez hasonló szabályt követnek.

$$20 \oplus 20 = 44, \quad 20 \oplus (-20) = (-4).$$

# Maximális entrópia

## egyenlőtlenségek



- Jensen:  $\sum_i p_i f(x_i) \geq f\left(\sum_i p_i x_i\right)$  ha  $f'' > 0$ .

a szelő a görbe felett / alatt =  $f'' > 0$  /  $f'' < 0$

- Gibbs egyenlőtlenség (itt  $f'' < 0$ ):

$$S[P] = \sum_i p_i f\left(\frac{1}{p_i}\right) \leq f\left(\sum_i \frac{p_i}{p_i}\right) = f(W) = \sum_{i=1}^W \frac{1}{W} f(W) = S[U].$$





# Additív és extenzív entrópia

mire additív, mire extenzív

Döntő az állapotok számának függése a szabadsági fokok számától.

Az entrópia **extenzív**, ha  $W(N)$  olyan, hogy  $\lim_{N \rightarrow \infty} S[U] \propto N$ .

- Boltzmann entrópia extenzív, ha  $W \sim 2^N$ , mert  $S[U] = \log W$ .
- Tsallis entrópia extenzív, ha  $W \sim N^{\frac{1}{1-q}}$ , mert  $S[U] = \frac{1}{1-q} (W^{1-q} - 1)$ .
- További entrópiaképletek is vannak, további esetekre.

# Mester egyenlet

## definíciók

A mester egyenlet lineáris a PDF-ben

$$\dot{P}_n = \sum_m [w_{nm}P_m - w_{mn}P_n]. \quad (9)$$

Stacionárius PDF (az összeg zéró)

$$0 = \sum_m [w_{nm}Q_m - w_{mn}Q_n]. \quad (10)$$

Részletes egyensúly (tagonként zéró)

$$\frac{w_{mn}}{w_{nm}} = \frac{Q_m}{Q_n}. \quad (11)$$

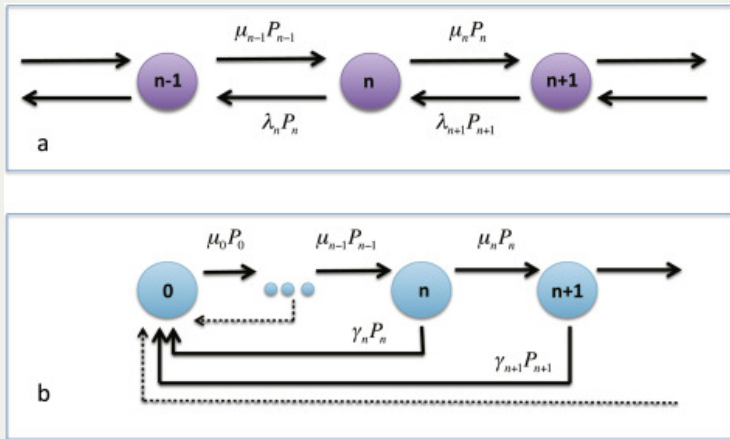
1 A részletes egyensúly az átmeneti rátákat szorítja meg.

2 Van stacionárius eloszlás a részletes egyensúly híján is.

3 A  $P \rightarrow Q$  konvergál az **entrópiikus távolság** szerint.

# Mester Egyenlet

## Diffúzió és LGGR



# Diffúzió és LGGR

## speciális átmeneti ráták

Diffúzió:  $w_{nm} = \mu_m \delta_{n,m+1} + \lambda_m \delta_{n,m-1}$

Mester egy.:  $\dot{P}_n = \mu_{n-1} P_{n-1} + \lambda_{n+1} P_{n+1} - (\mu_n + \lambda_n) P_n$

Folytonos verzió:  $\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (vP) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (DP),$

ahol  $D(n\Delta x) = (\lambda_n + \mu_n) \Delta x^2 / 2$  and  $v(n\Delta x) = (\lambda_n - \mu_n) \Delta x.$

LGGR:  $w_{nm} = \mu_m \delta_{n,m+1} + \gamma_m \delta_{n,0}.$

LGGR mester egy.:  $\dot{P}_n = \mu_{n-1} P_{n-1} - (\mu_n + \gamma_n) P_n + \delta_{n,0} \langle \gamma \rangle$

Folytonos LGGR:  $\frac{\partial}{\partial t} P = -\frac{\partial}{\partial x} (\mu P) - \gamma P.$

# LGGR

## bizonyos stacionárius eloszlások

$$\nu = \frac{\gamma}{\sigma(b-a)}.$$

T.S. Biró, Z. Nédá / Physica A 499 (2018) 335–361

**Table 1**

Resetting and growth rates for the most common stationary PDF-s.

| $\gamma(x)$    | $\mu(x)$                      | $Q(x)$                                                             |
|----------------|-------------------------------|--------------------------------------------------------------------|
| $\gamma$       | $\mu$                         | Exponential: $\sim e^{-(\gamma/\mu)x}$                             |
| $\gamma$       | $\sigma(x+b)$                 | Tsallis-Pareto: $\sim (1+x/b)^{-1-\gamma/\sigma}$                  |
| $\gamma$       | $\sigma x^\alpha, \alpha < 1$ | Weibull: $\sim x^{-\alpha} e^{-bx^{1-\alpha}}$                     |
| $\gamma$       | $\sigma(x+a)(x+b)$            | Pearson: $\sim (x+a)^{-1-\nu}(x+b)^{-1+\nu}$                       |
| $\gamma$       | $\sigma e^x$                  | Gompertz: $\sim \exp\left(\frac{\gamma}{\sigma} e^{-x} - x\right)$ |
| $\ln(x/a)$     | $\sigma x$                    | Log-Normal: $Q(x) dx \sim e^{-\gamma^2/2\sigma} d\gamma$           |
| $x$            | $\sigma^2$                    | Gauss: $\sim e^{-x^2/2\sigma^2}$                                   |
| $\sigma(ax-c)$ | $\sigma x$                    | Gamma: $\sim x^{c-1} e^{-ax}$                                      |



# Gini index és gintrópia

A jövedelmi egyenlőtlenség mértéke



# GINI

T.S.Biró, Z.Néda, Gintropy: a Gini index based generalization of entropy, Entropy 22 (2020) 879.

# Definíció



Corrado Gini 1912, *Variabilità e mutabilità. Contributo allo Studio delle Distribuzioni e delle Relazioni Statistiche*. Bologna, V. Puppini.

Legyen  $P(x)$  egy normált PDF. A Gini index definíciója:

$$G \equiv \frac{\langle |x - y| \rangle}{\langle x + y \rangle} = \frac{1}{2 \langle x \rangle} \int_0^\infty dx \int_0^\infty dy |x - y| P(x) P(y). \quad (12)$$

Kumulatív népesség (a gazdag végről):

$$\overline{C}(0) = 1.$$

$$\overline{C}(x) \equiv \int_x^\infty dy P(y). \quad (13)$$

Kumulatív vagyon (a gazdag végről):

$$\overline{F}(0) = 1.$$

$$\overline{F}(x) \equiv \frac{1}{\langle x \rangle} \int_x^\infty dy y P(y). \quad (14)$$

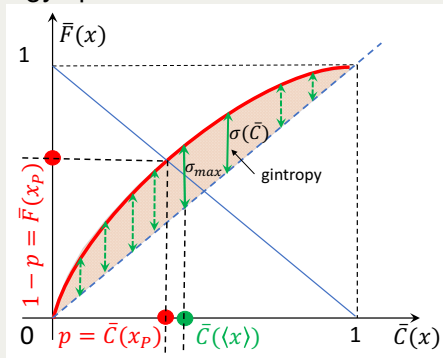




# A Lorenz görbe

Kumulatív vagyon vs kumulatív népesség

Egy tipikus  $\bar{F}-\bar{C}$  Lorenz ábra

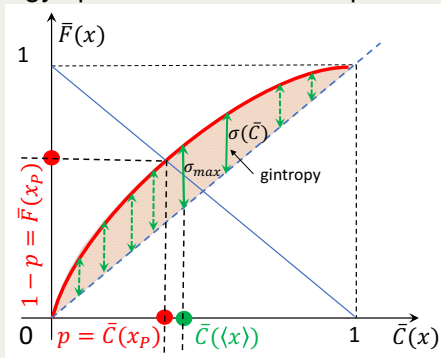


A vagyon (hírnév) kumulatív százalékára,  $\bar{F}$ , van ábrázolva a kumulatív népességgel (a legalább  $x$ -szer idézett publikációk számával)  $\bar{C}$ -sal szemben. Ez az ábra a Gini indexet,  $G$ , is felfedi:  $G/2$  a görbe és az átló közötti terület.

# Lorenz görbe

Kumulatív vagyon arány vs kumulatív népesség arány

Egy tipikus  $\bar{F}-\bar{C}$  Lorenz kép



A vagyon (hírnév) kumulatív százaléka,  $\bar{F}$ , van ábrázolva a kumulatív népességgel (a legalább  $x$ -szer idézett publikációk számával)  $\bar{C}$ -sal szemben. Ez az ábra a Gini indexet,  $G$ , is felfedi:  $G/2$  a görbe és az átló közötti terület. Vegyük észre, hogy

$$\frac{d\bar{F}}{d\bar{C}} = \frac{x}{\langle x \rangle} \text{ és } \sigma = \max \text{ ahol } \frac{d\bar{F}}{d\bar{C}} = 1 \text{ vagyis } x = \langle x \rangle.$$

# A gintrópia tulajdonságai

általában az entrópiáéira emlékeztetnek

- 1 A gintrópia sohasem negatív:  $\sigma = \bar{F} - \bar{C} = C - F \geq 0$  Bizonyítja az alábbi integrál

$$\int_x^\infty \left( \frac{y}{\langle x \rangle} - 1 \right) P(y) dy = \int_0^x \left( 1 - \frac{y}{\langle x \rangle} \right) P(y) dy \geq 0$$

Az első forma, ha  $y \geq x \geq \langle x \rangle$ , a második, ha nem.

- 2  $\max \sigma_{\max} = \sigma(\langle x \rangle)$ ,  $d\sigma/dx = (1 - x/\langle x \rangle) P(x)$  itt vált előjelet.

- 3 Pareto arány ahol  $\bar{C}_P = \frac{1}{2}(1 - \sigma(\bar{C}_P))$ ,  $\bar{F}_P = \frac{1}{2}(1 + \sigma(\bar{C}_P))$ .

- 4 Konvexitás:  $d^2\sigma/d\bar{C}^2 = -1/\langle x \rangle P(x) < 0$ .

- 5 A gintrópia képlete,  $\sigma(\bar{C})$ , néhány gyakori PDF-re olyan mint az entrópiáé.





# Példák

# Gini index példa

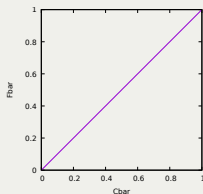
Kommunizmus: minden jövedelem egyenlő

$$P(x) = \delta(x - a) \text{ esetén } \langle x \rangle = a, \bar{C}(x) = \Theta(a - x) \text{ és } \bar{h}(x) = (a - x)\Theta(a - x).$$

$$\text{Ebből } \bar{F} = (\bar{h} + x\bar{C}) / \langle x \rangle = \Theta(a - x) \text{ és ezért}$$

$$\sigma(x) = \bar{F}(x) - \bar{C}(x) = 0. \quad (16)$$

Következésképpen **G = 0 szintén.**



# Gini index példa

Kommunizmus++ : néhányan még egyenlőbbek.

Kétcsúcsú PDF,  $P(x) = p\delta(x - a) + (1 - p)\delta(x - b)$ , adja hogy  $\langle x \rangle = pa + (1 - p)b$ .

$$\overline{C}(x) = p\Theta(a - x) + (1 - p)\Theta(b - x) \quad (17)$$

Az érték 1 ha  $x \leq a$  és  $(1 - p)$  ha  $x \in [a, b]$ , különben 0.

$$G = \frac{1}{\langle x \rangle} \int_a^b p(1 - p)dx = \frac{(b - a)p(1 - p)}{\langle x \rangle} = \frac{(\langle x \rangle - a)(b - \langle x \rangle)}{(b - a)\langle x \rangle}. \quad (18)$$

A **gintrópia** egy box függvény:  $\sigma(\overline{C}) = G\Theta(\overline{C}(b) \leq \overline{C} \leq \overline{C}(a))$  ahol  $\overline{C}(b) = \frac{1}{2} - \frac{p}{2}$ ,  $\overline{C}(a) = 1 - \frac{p}{2}$ .

$$G(p) = \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{\sqrt{b} + \sqrt{a}} = \text{max. ha } a, b \text{ fix. Pareto arány} \quad \overline{C}_P = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}, \quad \overline{F}_P = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}.$$



# Gini index példa

Szociáldemokrácia: egyenletes esély bármely jövedelemre – határok közt

A PDF ugrásos:  $P(x) = \frac{1}{b-a} \Theta(a \leq x \leq b)$ . A kumulatív népesség

$$\bar{C}(x) = \begin{cases} 1 & (x < a) \\ \frac{b-x}{b-a} & \text{otherwise} \\ 0 & (b < x) \end{cases} \quad (19)$$

Nyilván  $\langle x \rangle = (a + b)/2$  és a Gini index

$$G = 1 - \frac{1}{\langle x \rangle} \left[ a + \int_a^b \frac{(b-x)^2}{(b-a)^2} dx \right] = \frac{1}{3} \frac{b-a}{b+a}. \quad (20)$$

**A gintrópia:**  $\sigma(\bar{C}) = \frac{b-a}{b+a} \bar{C}(1 - \bar{C})$ .

Ha  $a = 0$  akkor  $\sigma = \max \bar{C} = 1/2$ -nél  $\rightarrow$  átlag = medián; Pareto:  $\bar{F}_P / \bar{C}_P \approx 62/38$

# Gini index példa

Természetes (Hobbes, Darwin)

A PDF:  $P(x) = \frac{1}{\langle x \rangle} e^{-x/\langle x \rangle}$ .

A megfelelő kumulatív:  $\overline{C}(x) = e^{-x/\langle x \rangle}$ . A Gini index

$$G = 1 - \frac{1}{\langle x \rangle} \int_0^{\infty} e^{-2x/\langle x \rangle} dx = \frac{1}{2}. \quad (21)$$

A gintrópia formula konstrukciója:

$$\overline{h} = \int_x^{\infty} e^{-y/\langle x \rangle} dy = \langle x \rangle e^{-x/\langle x \rangle}. \quad (22)$$

$\langle x \rangle \overline{F} = \overline{h} + x \overline{C} = (x + \langle x \rangle) e^{-x/\langle x \rangle}$  és  $\sigma = \frac{x}{\langle x \rangle} e^{-x/\langle x \rangle}$ .

$$\sigma = -\overline{C} \ln \overline{C} !$$

# Gini index példa

## Kapitalizmus: Tsallis – Pareto PDF

Start:  $\overline{C}(x) = (1 + Ax)^{-B-1}$  vezet  $\overline{h}(x) = \frac{1}{AB}(1 + Ax)^{-B}$ -hez. Ebből  
 $\langle x \rangle = \overline{h}(0) = 1/AB$ .

A Gini index

$$G = 1 - AB \int_0^{\infty} (1 + Ax)^{-2B-2} dx = \frac{B+1}{2B+1}. \quad (23)$$

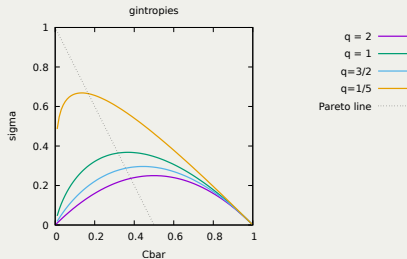
A gintrópia

$$\sigma = Ax(B+1)(1 + Ax)^{-B-1} = (B+1) \left( \overline{C}^{\frac{B}{B+1}} - \overline{C} \right). \quad (24)$$

**With  $q = \frac{B}{B+1}$  we have  $\sigma(\overline{C}) = \frac{1}{1-q}(\overline{C}^q - \overline{C})$  and  $G = \frac{1}{q+1}$ .**

# Gintrópia

Pareto  $q$  paraméterrel



# Gintrópia

Forrás



entropy



Article

## Gintropy: Gini Index Based Generalization of Entropy

Tamás S. Biró <sup>1,2</sup> and Zoltán Néda <sup>3,\*</sup>

<sup>1</sup> Wigner Research Centre for Physics, 1121 Budapest, Hungary; biro.tamas@wigner.hu

<sup>2</sup> Complexity Science Hub, 1080 Vienna, Austria

<sup>3</sup> Department of Physics, Babeş-Bolyai University, 400084 Cluj-Napoca, Romania

\* Correspondence: zneda@phys.ubbcluj.ro

Received: 9 July 2020; Accepted: 8 August 2020; Published: 10 August 2020

# Gintrópia

## Függvények

Entropy 2020, 22, 879

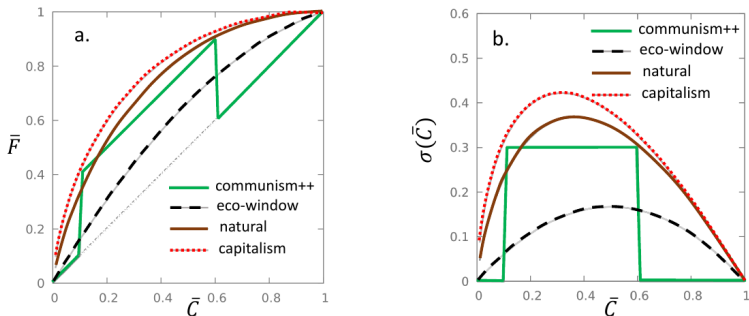
11 of 13

**Table 1.** Summary of PDFs, the gintropy formulas and Gini index values for some ideal income/wealth distribution schemes.

|             | $\rho(x)$                                              | $\sigma(\bar{C})$                                                 | G                                              |
|-------------|--------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------|
| natural     | $\frac{1}{\langle x \rangle} e^{-x/\langle x \rangle}$ | $-\bar{C} \ln \bar{C}$                                            | $\frac{1}{2}$                                  |
| capitalism  | $\frac{A}{1-q} (1 + Ax)^{\frac{-1}{1-q}}$              | $\frac{1}{1-q} (\bar{C}^q - \bar{C})$                             | $\frac{1}{q+1} \geq \frac{1}{2}$               |
| eco-window  | $\frac{1}{b-a} [\Theta(b-x) - \Theta(a-x)]$            | $3G \bar{C} (1 - \bar{C})$                                        | $\frac{1}{3} \frac{b-a}{b+a} \leq \frac{1}{3}$ |
| communism++ | $w \delta(x-a) + (1-w) \delta(x-b)$                    | $G [\Theta(\bar{C}(a) - \bar{C}) - \Theta(\bar{C}(b) - \bar{C})]$ | $\frac{(b-a)q(1-w)}{wa + (1-w)b}$              |
| communism   | $\delta(x-a)$                                          | 0                                                                 | 0                                              |

# Gintrópia

## Függvénygörbék



**Figure 3.** (a)  $\bar{F} - \bar{C}$  Lorenz curves in one comparison and (b) the corresponding **gintropy** curves,  $\sigma(\bar{C})$ , for the communism++, eco-window, natural and capitalism models. The Gini indices are  $G = 0.3$ ,  $G = 2/9$ ,  $G = 1/2$  and  $G = 4/7$ , respectively.

# Gintrópia

## Kapcsolat más mennyiségekkel

Gini index és gintrópia

$$G = \int_0^1 d\bar{C} \, 2\sigma(\bar{C}). \quad (25)$$

Boltzmann entrópia a gintrópiából

$$S_B = \ln \langle x \rangle + \int_0^1 d\bar{C} \ln \left( -\frac{d^2\sigma}{d\bar{C}^2} \right). \quad (26)$$

Nem-Possionitás a gintrópiából

$$\int_0^\infty dx \, \sigma(x) = \frac{\delta x^2}{\langle x \rangle}. \quad (27)$$



# Az egyenlőtlenségmérték evolúciója

## LGGR + lineáris preferencia

Folytonos LGGR szerint:

$$\frac{\partial}{\partial t} P := -\frac{\partial}{\partial x}(\mu P) - \gamma P \quad (28)$$

ahol  $\mu(x) = \lambda \cdot (x + b)$  és  $\gamma(x) = \gamma$ .

A kumuláns evolúciója

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{C} + \lambda \cdot (x + b) \frac{\partial}{\partial x} \bar{C} + \gamma \bar{C} = 0. \quad (29)$$

Az átlag evolúciója

$$\frac{d}{dt} \langle x \rangle = \lambda b + (\lambda - \gamma) \langle x \rangle. \quad (30)$$

Ha  $\lambda < \gamma$  akkor a végérték  $\langle x \rangle_{\infty} = \lambda b / (\lambda - \gamma)$

# Gini evolúció

## lineáris preferenciájú LGGR

Megfigyelve, hogy  $\langle x \rangle G = \int_0^\infty f(\bar{C}) dx$  ahol  $f(z) = z(1 - z)$  kapjuk:

$$\frac{d}{dt} [\langle x \rangle G] = \int_0^\infty f'(\bar{C}) \frac{\partial \bar{C}}{\partial t} dx. \quad (31)$$

Némi integrálás,  $\int_0^\infty \bar{C} dx = \langle x \rangle$ , és  $\int_0^\infty \bar{C}^2 dx = \langle x \rangle (1 - G)$ , oda vezet, hogy

$$\frac{d}{dt} [\langle x \rangle (1 - G)] = 2 \int_0^\infty \bar{C} \frac{\partial \bar{C}}{\partial t} dx = -2\lambda \int_0^\infty (x + b) \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} \frac{\bar{C}^2}{2} dx - 2\gamma \int_0^\infty \bar{C}^2 dx. \quad (32)$$

A végső eredmény:

$$\frac{d}{dt} [\langle x \rangle (1 - G)] = \lambda b + (\lambda - 2\gamma) [\langle x \rangle (1 - G)]. \quad (33)$$

# Gini evolúció

a lin.pref. LGGR analitikus eredményei

Ha  $\lambda < \gamma < 2\gamma$  (reális), akkor a célértékek

$$\langle x \rangle \longrightarrow \frac{\lambda b}{\gamma - \lambda}, \quad G \longrightarrow \frac{\gamma}{2\gamma - \lambda}. \quad (34)$$

Különben  $\langle x \rangle \rightarrow \infty$  (örök infláció) és  $G \rightarrow 1$ .

# Gini evolúció

numerikus eredmények: Lorenz map, Gini index

Kezdeti PDF:  $P(x) = \delta(x)$  (mind szegény). Végso PDF: Tsallis–Pareto.

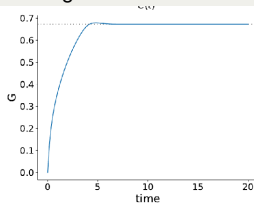
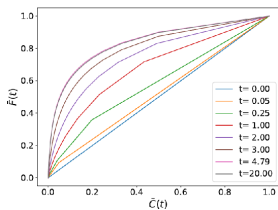


Figure 2. Time evolution of the Lorenz curve (upper panel) and the Gini index (lower panel). The steady dotted line in the lower panel corresponds to the final stationary Gini index.



# LGGR és a hadronizáció

## állapotfüggő átmenetek

Ha már van  $n$  hadron,  $\mu_n$  rátával keletkezik egy újabb hadron;  $\gamma_n$  rátával történik egy visszaolvadás a kvarkanyagba ( $n = 0$ )

Kiindulás

$$\mu_n = \sigma \left( 1 + \frac{n}{k} \right) \langle n \rangle, \quad \gamma_n = \sigma (n - \langle n \rangle). \quad (35)$$

Ha  $n > \langle n \rangle$ , azaz túl sok a hadron, a visszaolvadási ráta pozitív, különben negatív.

$$\mu_n + \gamma_n = \sigma n \left( 1 + \frac{\langle n \rangle}{k} \right) \geq 0.$$

# LGGR hadronization

## stationary multiplicity distribution

A fenti ráták NBD-t adnak:

$$Q_n = \binom{n+k-1}{n} \frac{\left(\frac{\langle n \rangle}{k}\right)^n}{\left(1 + \frac{\langle n \rangle}{k}\right)^{k+n}} \quad (36)$$

A második skála-kumulánsban megmondja a  $k$  paramétert:

$$F_2 = \frac{\langle n(n-1) \rangle}{\langle n \rangle^2} = 1 + \frac{1}{k}. \quad (37)$$

Poisson limesz:  $k \rightarrow \infty$ .

A momentum-generáló függvény:

$$Z(\beta\epsilon) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} Q_n e^{-n\beta\epsilon} = \left[ 1 + \frac{\langle n \rangle}{k} (1 - e^{-\beta\epsilon}) \right]^{-k}. \quad (38)$$

# LGGR hadronizáció

## Fázistérfogatok

Fázistér a végállapotban:  $R$ -sugarú  $N$ -gömb a  $p$ -adikus norma szerint:

$$V_N^{(p)} = \frac{\Gamma(1 + \frac{1}{p})^N}{\Gamma(1 + \frac{N}{p})} (2R)^N \quad (39)$$

$N = ng$  dimenzióban  $n$  részecske szabadon mozog  $g$  irányban. ( $p = 1$  káró,  $p = 2$  gömb,  $p \rightarrow \infty$ :  $2R$ -oldalhosszú hiperkocka)

Adott összenergia héj:  $\Omega_N^{(p)}(E) = \frac{d}{dE} V_N^{(p)}$ .

Részecske hozam  $\varepsilon$  részenergiával a teljes  $E$ -ből:

$$r_{N,g}^{(p)} = \frac{\Omega_g^{(p)}(\varepsilon) \Omega_{N-g}^{(p)}(E - \varepsilon)}{\Omega_N^{(p)}(E)}. \quad (40)$$

Igaz rá, hogy  $\int_0^E r_{N,g}^{(p)}(\varepsilon, E) d\varepsilon = 1$ .



# LGGR hadronizáció

## Energiahéj arányok a fázistérben

Nem.rel.:  $g = 2$  dimenzió,  $p = 2$  gömb;  $N = 2n$ ;

Extr.rel.:  $g = 1$  a jet mentén,  $p = 1$  norma;  $N = n$ ;

$$r_{n,1}^{(1)} = r_{n,2}^{(2)} = \frac{n-1}{E} \left(1 - \frac{\varepsilon}{E}\right)^{n-2}. \quad (41)$$

Ezt a közös  $r$  arányt átlagoljuk  $(n-2)$  új hadronra NBD-vel:

$$\langle r \rangle \equiv \sum_{n=2}^{\infty} r_{n,1}^{(1)} Q_{n-2} = -\frac{d}{d\varepsilon} f(\varepsilon/E), \quad (42)$$

ahol a spektrális alakfaktor

$$f(x) = (1-x) \left(1 + \frac{\langle n \rangle}{k} x\right)^{-k} \quad (43)$$

$f(0) = 1$  és  $f(1) = 0$ ,  $\langle r \rangle$  integrálja 1.

# LGGR hadronizáció

## Az alakfüggvény tulajdonságai

Vizsgáljuk a "puha" spektrumot,  $\varepsilon \ll E$ , magas multiplicitás mellett.

Határmenet  $E \rightarrow \infty$ ,  $\langle n \rangle \rightarrow \infty$  és fix  $E / \langle n \rangle = T$ .

$$\langle r \rangle \rightarrow \frac{1}{T} \left( 1 + \frac{1}{k} \frac{\varepsilon}{T} \right)^{-k-1} \quad (44)$$

A  $k \rightarrow \infty$  eset (Poisson hadronszám) exponenciálisan ad.

Nota:  $f(x)$  a hadronok kumulatív száma  $x E$  energia felett, egészen  $E$ -ig.

## Statisztika, extenzív, nem-extenzív

## Mester egyenlet, entrópikus konvergencia

Egyenlőtlenség mérték: Gini index, gintrópia

## Társadalom modellek, az egyenlőtlenség növekedése

## A hadronok statisztikájáról



# Összefoglaló

...és üzenet

- 1 Statisztika, extenzív, nem extenzív
- 2 Nem helyes mindig mindent összeadni (ld. százalék)
- 3 kommunizmustól a kapitalizmusig, jövedelem, részecskék
- 4 Egész entrópia családok alkalmazhatók



Wigner Research Centre for  
Physics Library

< CSILLEBÉRC WIGNER RCP ABOUT US SERVICES CATALOGUES E-LIBRARY DOCUMENTS OPEN ACCESS >

Home » E-library » Institutional publications » Publications for sale

PRIMO Catalogue and  
more

SEARCH

Compass

SEARCH

Key services

- MTMT administration
- Impact factor
- Book order
- Acquisitions list

EISZ

## Publications for sale

2024-10-04 16:54

To purchase our publications, please contact the Library. The ebook version is freely downloadable from the [publications page](#).

Bíró, Tamás Sándor

Gintropy : A Fiction on Inequality

Budapest, HUN-REN Wigner Research Centre for Physics,  
2024

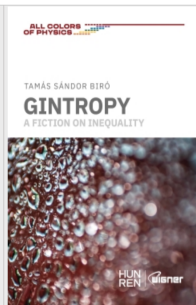
ISBN 978-615-6809-00-1

IX, 156 p.

Publishing Date: September 30, 2024.

Print copy price: 4900 HUF

eBook (PDF)



Language

- Magyar
- English

Contact

**Address:**

1121 Budapest, Hungary  
Konkoly-Thege Miklós út 29-33.  
building 4, Room 104.

**Phone:**

+36 1 392-2222 ext. 1404

**Phone/fax:**

+36 1 392-2583

**E-mail:**

[lib@wigner.hun-ren.hu](mailto:lib@wigner.hun-ren.hu)

**Opening hours:**

Monday-Thursday: 09:00 - 15.45

Friday: 09:00 - 14.30

## Questions?



1985



2004



2023