

A "Navier-Stokes-egyenlet"

Milleniumi Díj probléma

Matematika és fizika avagy mennyire műész az MI

Ván Péter

**HUN
REN** |  **WIGNER** Fizikai Kutatóközpont;
BME, Energetikai Gépek és Rendszerek Tanszék;
Montavid Termodinamikai Kutatócsoport

Budapest, 2026. október

A Navier–Stokes-egyenlet: származtatott,
de alapvető

Jelenségek, amelyek a modell határait kérdezik

- **Turbulencia.** Nikuradze csőkísérletei (1933): az átmenet és az érdesség; a lamináris megoldás *stabilitása*?
- **Lökéshullámok, szolitonok.** Mikor gerjednek, mikor maradnak simák? Nemlinearitás és disszipáció versenye.
- **Kiterjesztési problémák.** Bobylev-instabilitás (Burnett-rend, 1982); relativisztikus hidrodinamika: Eckart-instabilitás
- **Rejtély.** Szuperfolyadékok: hidrodinamika vs kvantummechanika.

A Navier–Stokes-egyenletet valahogy származtatjuk, de sokkal általánosabb érvényű, mint a származtatás feltételei.

Nemegyensúlyi termodinamika: mérlegek és második főtételek.

Intuitívan: a csillapított Newton-egyenlet kontinuum általánosítása. Lokális sebességkülönbséggel arányos csillapítás.

Mérlegek — anyagtörvény nélkül

$$\text{tömeg: } \dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$

$$\text{impulzus: } \rho \dot{\mathbf{v}} + \operatorname{div} \mathbf{P} = \rho \mathbf{f},$$

$$\text{teljes energia: } \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{|\mathbf{v}|^2}{2} + e \right) + \operatorname{div}(\mathbf{q} + \mathbf{P}^\top \mathbf{v}) = \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}.$$

Összenyomható, hővezető, viszkózus közeg. ρ sűrűség, $\mathbf{v}$ sebesség, $(\dot{}) = \partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla$, $\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^\top)$, $\mathbf{D}^0 = \mathbf{D} - \frac{1}{3}(\operatorname{div} \mathbf{v})\mathbf{I}$, $\mathbf{P}$ nyomástenzor, e fajlagos belső energia, $\mathbf{q}$ hőáram.

A belső energia mérlege: a teljes és a kinetikus különbsége

$$\text{kinetikus (impulzus} \cdot \mathbf{v}\text{): } \rho \frac{d}{dt} \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} + \operatorname{div}(\mathbf{P}^\top \mathbf{v}) = \mathbf{P} : \mathbf{D} + \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v},$$

$$\text{különbség: } \rho \dot{e} + \operatorname{div} \mathbf{q} = -\mathbf{P} : \mathbf{D}.$$

5(3) mérleg, 5(3) mező ($\rho, \mathbf{v}, e$) — de $\mathbf{P}$ szimmetrikus, $\mathbf{P}$ és $\mathbf{q}$ ismeretlen: a rendszer nem zárt. A Clay-egyenlet: $\rho = \text{áll.}$, $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$, energiamérleg nincs.

Univerzális módszer (Eckart, 1940)

Entrópiamérleg és Gibbs-reláció

$$\rho \dot{s} + \operatorname{div} \mathbf{J}_s = \sigma_s \geq 0 \quad \forall \text{ folyamatra,} \quad de = T ds + \frac{p}{\rho^2} d\rho.$$

$$\implies \rho T \dot{s} = \rho \dot{e} + p \operatorname{div} \mathbf{v} = -(\mathbf{P} - p\mathbf{I}) : \mathbf{D} - \operatorname{div} \mathbf{q}.$$

Az entrópiaprodukció

T -vel osztva, $\mathbf{J}_s = \mathbf{q}/T$ választással ($\operatorname{div}(\mathbf{q}/T) = \operatorname{div} \mathbf{q}/T - \mathbf{q} \cdot \nabla(1/T)$):

$$\sigma_s = -\frac{1}{T} (\mathbf{P} - p\mathbf{I})^0 : \mathbf{D} + \mathbf{q} \cdot \nabla \frac{1}{T} \geq 0.$$

Az egyenlőtlenség megoldása: izotróp, lineáris zárás

$\sigma_s \geq 0$ minden $\mathbf{D}^0$, $\operatorname{div} \mathbf{v}$, ∇T mellett. Lineáris izotróp megoldás: $\mathbf{q} = -\lambda \nabla T$ és $\mathbf{P} - p\mathbf{I} = -2\mu \mathbf{D}^0 - \zeta(\operatorname{div} \mathbf{v})\mathbf{I}$, ekkor

$$\sigma_s = \frac{2\mu}{T} |\mathbf{D}^0|^2 + \frac{\zeta}{T} (\operatorname{div} \mathbf{v})^2 + \frac{\lambda}{T^2} |\nabla T|^2 \geq 0 \Leftrightarrow \mu, \zeta, \lambda \geq 0.$$

Newton és Fourier törvénye, és a viszkozitások pozitivitása is az entrópiamérleg következménye — az energiamérleg nem tartalmazza. Pontosabb konstitutív állapottér (Coleman–Noll; Liu.) A T -t az entrópia definiálja ($1/T = \partial s / \partial e$). A p a termodinamikai nyomás.

Boltzmann-egyenlet és a lezárási probléma (Hilbert)

$\partial_t f + \mathbf{c} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f = Q(f, f)$; invariánsok 1, $m\mathbf{c}$, $\frac{1}{2}m\mathbf{c}^2 \Rightarrow 5$ mérleg, $\mathbf{P}$, $\mathbf{q}$ ismeretlen.

Chapman–Enskog: sorfejtés a Knudsen-számban

$f = f^{(0)}(1 + \text{Kn} \varphi_1 + \text{Kn}^2 \varphi_2 + \dots)$, $f^{(0)}$ lokális Maxwell-eloszlás.

- $O(1)$: $\mathbf{P} = p\mathbf{I}$, $\mathbf{q} = 0$ — Euler.
- $O(\text{Kn})$: $\mathbf{P} = p\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{D}^0$, $\mathbf{q} = -\lambda\nabla T$ — Navier–Stokes–Fourier; egyatomos gázra $\zeta = 0$, kemény gömbökre $\mu = \frac{5}{16d^2} \sqrt{\frac{mk_B T}{\pi}}$, $\lambda = \frac{15}{4} \frac{k_B}{m} \mu$, $\text{Pr} = \frac{2}{3}$. $\mu \propto \sqrt{T}$ (Maxwell, 1860).
- $O(\text{Kn}^2)$: Burnett — instabil (Bobylev). **A lokális egyensúlyi zárás csak $\text{Kn} \rightarrow 0$ mellett érvényes.**

Szigorú határátmenetek

H -tétel: $s = -k_B \int f \ln f \, d\mathbf{x}$; $\mu, \lambda \geq 0$ itt *következmény*, feltételekkel. Többféle szigorú eredmény (momentum sorfejtés, Grad-sorfejtés, entropikus zárás). Pl. Deng–Hani–Ma (2025): kemény gömbök $\rightarrow$ Boltzmann $\rightarrow$ hidrodinamika. Stabilitás kérdése nyitott.

Az egymillió dolláros
egyszerűsítés/degeneráció

Az egymillió dolláros feladat pontosan

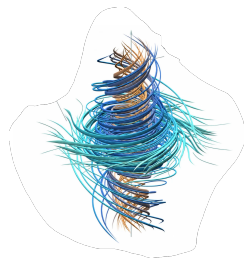
Clay Intézet (Fefferman), $\mathbb{R}^3$ vagy $\mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$
(tórusz), $\nu > 0$

$$\begin{aligned}\partial_t v + (v \cdot \nabla)v &= \nu \Delta v - \nabla p + f, \\ \operatorname{div} v &= 0, \quad v(x, 0) = u^\circ(x) \text{ sima,}\end{aligned}$$

Megoldás: $p, v \in C^\infty$, és $\int |v|^2 dx < C$ minden t -re. **Csak a sebességre** van korlát, a nyomásra nincs.

Négy problémaág

	tartomány	erő	állítás
(A)	$\mathbb{R}^3$	$f \equiv 0$	glob. sima megoldás
(B)	tórusz	$f \equiv 0$	glob. sima megoldás
(C)	$\mathbb{R}^3$	sim, lecsengő f	véges idejű robbanás
(D)	tórusz	sim f	véges idejű robbanás



Befelé spirálozik és felfelé nyúlik.

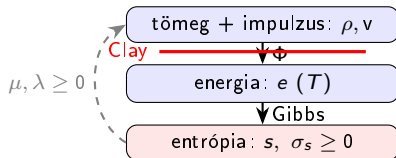
A narancssárga gyorsabb.

A 2026-os eredmények a **(C)/(D)** ágat célozzák. Az **(A)/(B)** — amit a szakma „a” problémának tart — **nyitott**.

A Clay-redukció

$\rho = \text{áll.}$, $\text{div } \mathbf{v} = 0$, nincs energiaegyenlet

- a ζ tag kiesik; a hővezetés eltűnik (T nem mező);
- az entrópiaprodukciónak egyetlen tagja:
 $\sigma_s = \frac{2\mu}{T} |\mathbf{D}|^2 = \frac{\nu\rho}{T} |\nabla \mathbf{v}|^2$;
- a nyomás nem állapotegyenletből, hanem a $\text{div } \mathbf{v} = 0$ kényszerből jön: **nemlokális, pillanatszerű.**



A piros vonal alatti rész a Clay-modellben nincs. A csatolás egyirányú ($\Phi: \mathbf{v} \rightarrow T$); a visszacsatolásból (szaggatott) csak a $\nu \geq 0$ előjel marad.

Izoterm? Adiabatus? — nem: **atermikus**

A modell nem rögzíti T -t: *nincs benne T* . A disszipációs teljesítménynek a modellen belül nincs hova mennie. Az izotermiához $\lambda \rightarrow \infty$ vagy hőtartály kellene; $\mathbb{R}^3$ -on nincs perem.

Degeneráció: nincs energiamérleg.

Ami történt — időrendben (2026. 09. 30-ig)

-
- 2023–25 [Córdoba, Martínez-Zoroa \(Zheng\)](#): „végtelen kaszkád” technika; erő nélküli Euler-robbanás $C^{1,\alpha}$ -ban, hajtott hipodisszipatív NS.
2025. 09. Buckmaster (DeepMind-csapattal): instabil szingularitások numerikus felfedezése (IPM (porózus), Boussinesq).
08. 15. / 22. [Alpöge–Buckmaster](#): [sima erővel](#) hajtott robbanás IPM-re, Boussinesq-re, 3D Eulerre; Lean-ellenőrzés. Egy évnyi munka, több nyelvi modellel.
09. 01–05. [OpenAI](#): a pletykák hatására mind a hat problémára ráállít egy belső modellt; $\sim 10\,000$ ágens, 88 óra, kb. 130 milliárd token.
09. 07–08. Buckmaster nyilatkozata (éjfél); OpenAI: 166 oldal + Lean, hajtott NS-robbanás, (C)/(D).
09. 11. [Clay](#): „apparently settled”, státusz: [active](#); az eljárás „szándékosan nem sietős”. [26 Fields-érmes](#) nyílt levele: *A Severe Misalignment of AI in Mathematics*.
09. 13. OpenAI tagad: július 3. utáni felhasználói bevétel nem befolyásolhatta a rendszert.
09. 20–30. Intézményi fejlemény nincs. arXiv-reakciók: célkitűzés az [erő nélküli](#) ág programszerű keresésére (Petrillo–Glimm, 09. 22.); az OpenAI-robbanás önhasonló változóinak azonosítása egy 1998-as egzakt NS-megoldással.
-

[Független emberi ellenőrzés a 166 oldalra: nem ismert, hogy lezárult volna.](#)

Az irányt embereknek kellett megadni

Az út évekig épült

- A „sima erővel hajtott robbanás” irányát **Córdoba és Martínez-Zoroa** nyitotta meg. Buckmaster: **Martínez-Zoroa Fields-érmet érdemel**. Córdoba: „a mi munkánk nélkül a gép nem oldotta volna meg”.
- Buckmaster és Alpöge tudatosan ezt választották; rajtuk kívül szinte senki nem dolgozott rajta.
- Buckmaster: ez nem az az irány, amire pár nap alatt eljut valaki úgy, hogy odaadja a modellnek a feladat szövegét.

A prioritási vita — dokumentált magja

Az OpenAI két ajánlatot tett (közös bejelentés, ill. az OpenAI-bizonyítás emberi átírása Alpöge nélkül); Buckmaster mindkettőt elutasította, és a bejelentés előtt publikált. Az OpenAI elismeri: a felhasználók anonimizált adatai javíthatták a modellt; azt tagadja, hogy a konkrét draftokhoz hozzáfért. **Egyik oldal állításai sem függetlenül igazoltak.**

Nem „odaadtuk a feladatot és megoldotta”.

Miért érdekes ez egyáltalán ?

Millenniumi problémák

Két lista, száz év különbséggel

Hilbert, Párizs, 1900: 23 megoldatlan feladat. Nem jóslat, nem predikció — *iránykijelölés*.

Clay Intézet, Párizs, 2000. május 24.: 7 feladat, egyenként egymillió dollár. Egyetlen feladat szerepel mindkét listán: a Riemann-sejtés (Hilbertnél a 8.).

A hét millenniumi probléma

- Riemann-sejtés
- P vs. NP
- Navier–Stokes: létezés és simaság — 2026: „active”
- Yang–Mills: létezés és tömegrés
- Hodge-sejtés
- Birch–Swinnerton-Dyer-sejtés
- **Poincaré-sejtés** — Perelman (2003); a díjat visszautasította

Hilbert 23 feladatának többsége megoldott, de nem mind: a 8., a 12. és a 16. második fele nyitott; a 4., a 6. és a 23. inkább *program*, mint feladat. **Hilbert 6.-ot lényegében diszkvalifikálták** — nem matematika, nem lezárható.

Hilbert 6. problémája és a folyadékegyenletek

Olvasatok

- 1900: az axiomatikus módszer kiterjesztése a fizikára: Valószínűségszámítás (Kolmogorov, 1933), kvantummechanika (Neumann, 1932), kontinuummechanika (Truesdell–Noll, 1963), termodinamika (Carathéodory, 1909), ... *A kézenfekvő olvasat: diszciplínánként külön-külön.*
- A hidrodinamika mint **határátmenet**: részecskék $\rightarrow$ Boltzmann $\rightarrow$ Euler/Navier–Stokes. Ez a program másik szála.
- Egy fizikai probléma matematikai megfogalmazása akkor teljes, ha a megoldása létezik, egyértelmű, és folytonosan függ a kezdeti és peremfeltételektől: **korrekt kitűzés** (Hadamard, 1902/1923; Courant–Hilbert II). Ez a program harmadik szála.

Navier–Stokes: Leray (1934) gyenge megoldások, energia-egyenlőtlenség;

Ladyzsenszkaja (1958–59) 2 dimenzióban létezés és egyértelműség. 3D: nyitott.

2025: **Deng–Hani–Ma** levezeti a folyadékegyenleteket kemény gömbök dinamikájából (Lanford tételének (1975) kiterjesztése hosszú időre). Ezt szokás „Hilbert 6. megoldásának” nevezni — **szűkített átértelmezés**: egyetlen szálát zár le, és a szerzők is így fogalmazznak. Deng 2026 júliusában Fields-érmét kapott.

Godunov (1961)–Friedrichs–Lax (1971)–Boillat (1974) tétel

Egy fizikai probléma matematikai megfogalmazása akkor teljes, ha a megoldása létezik és egyértelmű (esetleg folytonosan függ a kezdeti és peremfeltételektől, ha vannak ilyenek).

Friedrichs–Lax változat

$\partial_t u + \partial_i F^i(u) = 0$, $u \in \mathbb{R}^n$, $A^i = \nabla_u F^i$. **Entrópiamérleg** (s, J^i) : minden sima megoldásra $\partial_t s(u) + \partial_i J^i(u) = 0$, azaz $\nabla s \cdot A^i = \nabla J^i$ (kompatibilitás).

Tétel

Ha s (a fizikai entrópiasűrűség) szigorúan konkáv, $H = -\nabla^2 s \succ 0$, akkor HA^i szimmetrikus, tehát

$$H \partial_t u + HA^i \partial_i u = 0$$

szimmetrikus hiperbolikus: szimmetrikus együtthatók, pozitív definit időderivált-mátrix.

Bizonyítás

Komponensekben: $s_{,k} A_{kj}^i = J_{,j}^i$. Deriváljuk u_l szerint: $s_{,kl} A_{kj}^i + s_{,k} \partial_l A_{kj}^i = J_{,jl}^i$. Itt $\partial_l A_{kj}^i = \partial_j \partial_l F_k^i$ szimmetrikus (j, l) -ben, és $J_{,jl}^i$ is. Tehát $(HA^i)_{ij} = s_{,kl} A_{kj}^i$ szimmetrikus (j, l) -ben. $\square$

Forrásos rendszerre $(\partial_t F^0(u) + \partial_i F^i(u) = P)$ ugyanez, $-s$ konvex F^0 -ban.

Termodinamikai háttér $\Rightarrow$ korrekt kitűzöttség

Nézőpontok

— s szigorúan konvex $\iff$ szimmetrikus hiperbolikus alak
 $\implies$ lokális létezés, egyértelműség, folytonos függés.

(Friedrichs 1954; Kato 1975; Majda 1984.) Godunov (1961) fordítva: konzervatív szimmetrikus hiperbolikus rendszerhez *van* entrópiamérleg. Az energiabecslés: $\frac{d}{dt} \int \partial u \cdot H \partial u \leq C \int \dots$ — a konkáv entrópia Hesse-mátrixa a norma (termodinamikai távolság (Diósi-Lukács)).

A főmező: Legendre-trafó, intenzívek a jó változók

$$u' = \frac{\partial(-s)}{\partial u}, \quad s' = u' \cdot F^0 + s, \quad J'^i = u' \cdot F^i + J^i, \quad F^0 = \frac{\partial s'}{\partial u'}, \quad F^i = \frac{\partial J'^i}{\partial u'}.$$

$$\frac{\partial^2 s'}{\partial u' \partial u'} \partial_t u' + \frac{\partial^2 J'^i}{\partial u' \partial u'} \partial_i u' = P, \quad \frac{\partial^2 s'}{\partial u' \partial u'} \succ 0.$$

Euler-gáz: a főmező egyensúlyi komponensei = Liu-multiplikátorok (Galilei-invariáns alak)

$$\Lambda_\rho|_E = \frac{1}{T} \left(g - \frac{v^2}{2} \right), \quad \Lambda_{v_i}|_E = \frac{v_i}{T}, \quad \Lambda_e|_E = -\frac{1}{T}, \quad g = e + \frac{p}{\rho} - Ts \text{ (kémiai potenciál)}.$$

A tömegmérleg multiplikátorában a $p/(\rho T)$ tag köti a nyomást a sűrűséghez. Racionális kiterjesztett termodinamika (Müller–Ruggeri), SHTC-iskola (Godunov–Romenski), ...

Clay-degeneráció: az entrópia duális potenciáljának Hesse-mátrixa elfajul

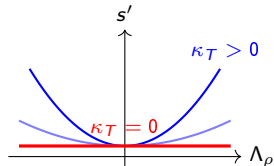
Az inkompresszibilis határ

$$\kappa_T \rightarrow 0 \Rightarrow c \rightarrow \infty, \partial_p^2 s \rightarrow -\infty, \text{ Hess}(s') \text{ elfajul,}$$

Primálban az entrópia p irányban végtelenül merev; a duális potenciál a konjugált irányban lapos: ott csak kényszer van. A szimmetrikus hiperbolicitás elvész; a típus **elliptikus–parabolikus keverék**. Ekkor veszíti el a nyomás a főmező-jellegét.

Fizikai regularizáció (Gouin–Ruggeri, 2012)

Müller-paradoxon: szigorúan inkompresszibilis közeg térfogata nem függhet T -től ($c_v = 0$ vagy képzetes c). Javítás: $\rho = \rho_0[1 - \alpha(T - T_0) + \beta(p - p_0)]$, stabilitás: $\beta > \beta_{cr} = \alpha^2 TV/c_p$. Vízre $\beta_{cr} \approx 3 \cdot 10^{-12}$, $\beta \approx 5 \cdot 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$: bőven teljesül (p_{cr} definíciója ellenőrizendő): gyakorlatilag összenyomhatatlan, termodinamikailag konzisztensen. **Hiperbolikus, véges jelterjedésű.**



konvexitás $\rightarrow$ lapos irány

A duális potenciál görbülete a Λ_p irányban $\rightarrow 0$ — a nyomás kényszer-multiplikátorra válik.

Még egy kis fizika

A robbanás és a modell érvényességi köre

Három, egymástól független fizikai kifogás

- **Mach-szám.** Inkompesszibilis közelítés: $Ma \lesssim 0,3$. Ha $\|v\|_{L^\infty} \rightarrow \infty$ rögzített c mellett: $Ma \rightarrow \infty$. A robbanás **kilép a saját modellje érvényességi köréből**. Először hangsebesség, lökeshullám, kompresszibilitás.
- **Knudsen-szám.** A szinguláris mag mérete $\ell_r \asymp \tau^{1/2} \rightarrow 0$ ($\tau = T^* - t$); ha ℓ eléri a szabad úthosszat, $Kn \rightarrow \infty$: a Newton–Fourier zárás (Chapman–Enskog $O(Kn)$) érvényét veszti. Relaxációs, hiperbolikus általánosítások kellenek:
 $\tau_h \partial_t \mathbf{q} + \mathbf{q} + \lambda \nabla T = 0$, $\tau_s \partial_t \mathbf{\Pi} + \mathbf{\Pi} = -2\eta \mathbf{D}^0$ (Maxwell–Cattaneo).
- **Relativisztikus korlát.** $|v| \rightarrow \infty$ meghaladja c_{fny} -t; a kauzális viszkózus hidrodinamika (Israel–Stewart; BDNK) véges jelterjedésű.

Mit jelent ez, és mit nem

Mindhárom a modell *fizikai* értelmezhetőségére vonatkozik, nem a matematikai jólkitűzöttségre: a Clay-probléma az idealizált PDE-ről szól. A kifogások elsősorban a (C)/(D) forcingos ágat érintik; az (A)/(B) erő nélküli kérdést nem teszik értelmetlenné — **az marad a fizikailag legrelevánsabb kérdés**: hű valóságmodellről létezését és egyértelműséget várunk.

Véges jelterjedésű regularizációk: fizikai kiterjesztés

Ami rendelkezésre áll

- **Mesterséges kompresszibilitás** (Chorin, 1967): $\partial_\tau p + c^2 \operatorname{div} v = 0$ — véges c , hiperbolikus.
- **SHTC** (Godunov–Romenski; Peshkov–Romenski 2016): elsőrendű, szimmetrikus hiperbolikus, termodinamikailag kompatibilis; a viszkozitás relaxációs időből: $\mu \simeq \frac{1}{6} \rho c_s^2 \tau$, NS a $\tau \rightarrow 0$ határban.
- **Hiperbolikus relaxáció** (Ilyin–Rykov–Zelik, 2018, 2D):
$$\varepsilon \partial_{tt} v + \partial_t v + (v \cdot \nabla) v + \nabla p = \Delta v + g.$$

A lényeges részeredmény (Ilyin–Rykov–Zelik)

$\varepsilon \neq 0$ mellett a relaxált rendszernek *nincs* energia-egyenlőtlensége: globális létezés csak kis adatra, nagy adatra robbanás várható. Egy Jeffreys-típusú viszkoelasztikus tag ($\varepsilon \partial_t \operatorname{div}(v \otimes v)$) helyreállítja az energiaazonosságot, és a robbanási mechanizmus eltűnik. A nemlokális nyomás a véges jelterjedést elrontja.

Nem a hiperbolizálás regularizál, hanem a konvex energiaazonosság megléte. Ez a Friedrichs–Lax-lánc a gyakorlatban.

Millenniumi probléma — fizikus szemmel, összefoglalva

- Fizikus számára a probléma önmagában nem túl érdekes. Háttérirány: a Navier–Stokes disszipatív — a nyelve a mérlegek és a második főtételek, nem a hatáselv.
- A Clay-modell **atermikus**: nem izoterm, hanem energiamérleg nélküli. Ami megmarad a második főtételeből: az energia-egyenlőtlenség.
- A robbanás **koncentráció**, nem energiakatasztrófa: $\int |v|^2$ korlátos, $\|v\|_\infty \rightarrow \infty$, a teljes entrópiatermelés véges. Külső erő (vagy perem) kell hozzá; a Leray-projekció miatt csak $\operatorname{rot} f \neq 0$ számít.
- Hilbert 6. program: **nem szimmetrikus hiperbolikus? Akkor kiegészítendő.** A véges jelterjedésű regularizációk melletti robbanás: nyitott, tesztelhető kérdés.
- **Elvárás**: hű valóságmodellről azt várjuk, hogy létezzen és egyértelmű legyen a megoldása. Ez például egy keretválasztás.

„Nagyon örvendetes, hogy a számítógép érti a problémát.
De én is szeretném megérteni.”

*„It is nice to know that the computer understands the problem.
But I would like to understand it too.”*

Wigner Jenő

Az előadás egy mondatban

Két dolgot csinálunk, amikor tudományt művelünk

Javítgatás. A meglévő kereten belül: számolunk, ellenőrzünk, pontosítunk, illesztünk.

Átépítés. Magát a keretet cseréljük: más fogalmakkal, más nyelven kezdünk gondolkodni.

A gép a **javítgatásban** egyre erősebb: egy hónap alatt megcsinálja, amire enélkül évek kellettek volna.

A **kritériumválasztás** és a **megértés** egyelőre a miénk: javítgatás = rögzített, külső sikerkritérium (Clay 2000, Lean); átépítés = a kritérium változik. Gépi átépítést eddig nem láttunk. A Navier–Stokes-példán megnéztük, mit jelent ez egy fizikusnak: **a keret maga — a mérlegek és az entrópia — volt a kérdés.**

Hogyan működik egy nyelvi modell? — fizikus olvasat

Célgépek és nyitott tér

Sakk (10^{47} állás), Go (10^{170}), AlphaFold: véges tér, egyértelmű jósági mérték. Nyelvi modell: nincs szabálykönyv, nincs pontszám, nincs győzelmi feltétel. A tanulmányag túlnyomó része angol.

Távolságból valószínűség

A modell az előzményből egy h vektort állít elő, és minden i szóra a $h \cdot e_i$ skalárszorzatot veszi (e_i : az i -edik token kimeneti vektora, a kimeneti mátrix sora). H a szövektorok hossza nagyjából egyforma,

$$p_i \propto e^{-E_i/T}, \quad E_i \approx \frac{1}{2} \|h - e_i\|^2.$$

Az „energia” a távolság a kontextus és a szó között — innen a Boltzmann-alak (softmax). A T -t a gyakorlatban is *hőmérsékletnek* hívják.

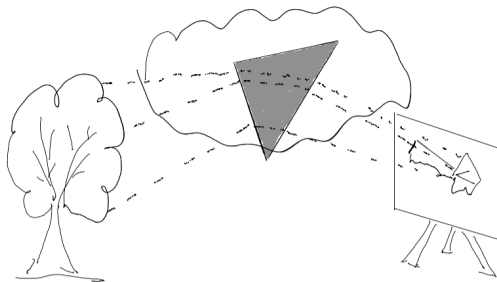
Két „távolság” van itt: a jelentéstérbeli távolság *metrika*; a tanításkor minimalizált keresztentrópia *divergencia* eloszlások között — nem szimmetrikus. Keresett a maximális entrópiájú eloszlás rögzített várható energia mellett. Ismerős szerkezet.

Hogyan működik a tudomány?

A tudomány gerince (lényege) az
interszubjektív tudásháló.

- **Interszubjektív.** Fiktív és valóság, tehát nem fizikailag objektív. A relativitáselmélet olyan, mint a pénz vagy mint Magyarország.
- **Tudás.** Személyes. Cél az igazság: azaz a valóság modellezése.
- **Információs hálózat.** Funkciók: igazság és együttműködés.

Valóságmodellek: a *camera scientiae*

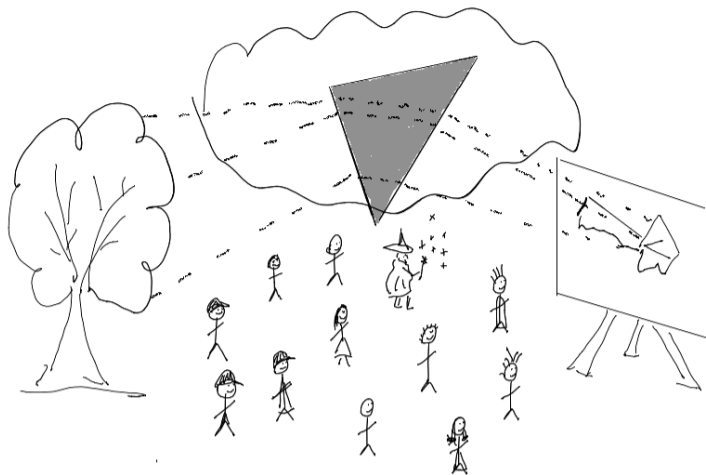


A leképező rendszer három funkciója

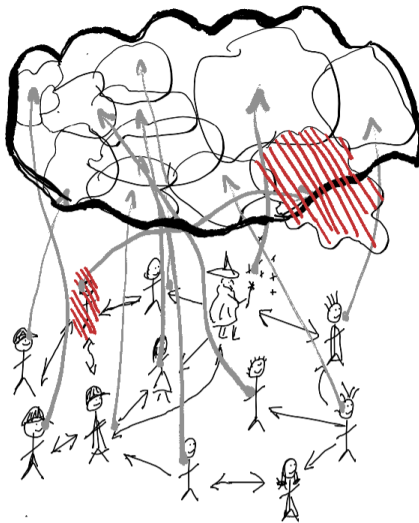
1. **Irányválasztás** — merre fordul .
2. **Valóságkapcsolat** — hogyan képez (a rés, amelyen a fény bejön).
3. **Hűségkritérium** — mi számít jó képnek.

Az (ész)gép belül belül dolgozik. A rendszert nem fordítja el, nincs hűségkritérium, nincs valóságkapcsolat.

Modellek és modellezők



Felhők a felhőben



Tudástechnológiák

Általános technológiák

- **Átadás.** Pl. beszéd (ember–ember), könyvek (ember–felhő).
- **Tárolás.** Késleltetett átadás: írás, könyvtár, adatrepozitórium.
- **Tömörítés.** Gyors átadás, könnyebb tárolás. Pl. fogalmak, $F = ma$, $\sigma_s \geq 0$.
- **Önjavítás.** Vita, logika, kísérlet.

A tudományban minden, mindig, mindenütt vitatható. Elvi cél: igazság, azaz objektivitás és valósághűség.

Önjavítás: az igazság technológiája

- **Egymással: vita.** Személyes és csoportmodellek összehasonlítása. Játékszabályok: peer review, konferenciák. 2026: sajtóközlemény + Lean *nem* helyettesíti.
- **Önmagával: logika.** Nyelvtan. A hibák azonosítása. A gép itt erős.
- **Valósággal: tudományos módszer.** Modell $\rightarrow$ kísérlet $\rightarrow$ módosítás $\rightarrow$... Mach, Knudsen: a robbanás itt bukik el.

Észgép: kombinált technológia

Tárol, átad. Tömörít? Önjavít?

A természet nyelvei és nyelvjárásai

A matematika szerepe avagy Galilei nyelvészet

- **Horizontális.** Diszciplínák. Mérnök, tudós, ...
- **Vertikális.** Tömörítési kódok: képlet, differenciálegyenlet, geometria, operátoralgebra. A matematika: nyelv és alkatrész.
- **A tudomány: Sapir–Whorf típusú nyelvcsalád.** A fogalmi keretek meghatározzák, mire tudsz gondolni. A Navier–Stokes mint PDE, mint mérlegrendszer, mint kinetikus limesz, mint hatáselv nélküli dinamika: **négy nyelvjárás, nem ugyanazok a kérdések.**
- NS a matematikában: eszközépítés? NS a fizikában: modellezés?



Newton nyelve és Fermat nyelve — nem egyenértékűek

Newton: kezdetiérték-feladat — $m\ddot{x} = F(x)$

Tudom, hol vagyok és milyen erő hat: lépek egy kicsit. Ok → okozat, sorban.

Fermat–Hamilton: peremérték-feladat — $\delta S = 0$

Rögzítem a kezdetet és a véget; a hatás stacionárius pályáját keresem.
Stacionárius, *nem* minimum.

Miért nem ugyanaz a két nyelv?

- A hatáselv **többet ad**: Noether tétele (szimmetria → megmaradási törvény).
- A hatáselv **kevésbé jó**: súrlódás, hővezetés, a Navier–Stokes viszkózus tagja — ezekhez *nincs szokásos Lagrange-függvény*. (A variációszámítás inverz problémája.)

A Navier–Stokes **disszipatív**: a természetes nyelve nem a hatáselv, hanem a mérlegek + második főtétele. Ezt a nyelvet néztük meg az elején.

Kutatás: javítás és/vagy átépítés?

Hol segít az észgép (most)?

- **Nem egy lépésben.** Az első megfogalmazást rendszerint elfelejtik; a 2.–3. generáció fedezi fel újra (Planck-szabály). Elgindi → Córdoba–Martínez-Zorúa → Alpöge–Buckmaster → ágensek. *gép: segít?*
- **Elméleti konzisztencia.** Paradoxonok feloldása: kvantumgravitáció, információs paradoxon — és: mi a nyomás, ha $\kappa_T = 0$? *gép: alig*
- **Részletes modellezés.** Naprendszer-tesztek, modellek versenye, Einstein-teleszkóp; 166 oldal + Lean. *gép: nagyon*
- **Új adatgyűjtési technológiák.** A mérnöki gyakorlat önjáró. *gép: nagyon*

Javítgatás és átépítés — egy konkrét példa

Amire a gép jó: javítgatás

Számítások, ellenőrzés, vázlatból szöveg, forma és tartalom. Kreatív?

Tapasztaljuk. Nálam például: Descartes előjelszabálya, Eötvös levezetésének értelmezése — kereten *belül*.

Egy átépítés — (Clifford Truesdell, Matolcsi Tamás)

A termodinamika a világban egyensúlyi és statisztikus eredetű. Kiderült, hogy alapvetően nemegyensúlyi, és lényegében **stabilitási feltételrendszer**, differenciálegyenletekre alapozható. Ugyanaz a fizika, más nyelven.

Átépítkezési előfeltételek

- **Az axiómák előtti döntés.** Miből indulunk ki? — Mérlegek? Hatáselv? Kinetikus elmélet?
- **Hűségkritérium.** Mi számít jó modellnek? Ezt nem a modell mondja meg.
- **Valóságkapcsolat.** A mérés fizikai aktus, nem szövegművelet.

Átépítéses párbeszéd: folyamatos értetlenkedés, amikor letérünk az irányról. Nem tudja átírni a termodinamikát új dinamikai elvek szerint. Nem tudja megoldani a Milleniumi problémát. Egyelőre?

Szilárd Leó receptje — a Mark Gable Alapítvány (1948)

A feladat: hogyan lehetne *lassítani* a tudományt?

- Alapíts egy alapítványt sok pénzzel. Pályázni lehet rá, meggyőző indoklással.
- Legyenek bizottságok, egyenként legalább tíz-tizenkét tudóssal, akik elbírálják a pályázatokat.
- A legaktívabb kutatókat vedd ki a laborból, és tedd be a bizottságokba.

Mi történik ezután?

- A legjobbak bírálnak ahelyett, hogy kutatnának.
- A pályázók olyan témát választanak, amiből *biztosan* lesz publikáció.
- Divatok keletkeznek. Aki követi, kap pénzt. Aki nem, nem kap.
- A tudomány kiszárad. Társasjáték lesz belőle.

Szilárd ezt 1948-ban írta, nem sokkal az amerikai NSF megalakulása előtt.

És most? Két irány

Buckmaster szerint nem az eredmény a fontos, hanem hogy egy matematikus és egy nyelvi modell ezt *egy hónap alatt* meg tudta csinálni — és hogy ez mit jelent arra nézve, **hogyan tanítunk diákokat, hogyan osztunk érdemet, hogyan bírálunk, és mire érdemes egy emberéletnyi figyelmet fordítani.** A 26 Fields-érmes levele (09. 11.): a fogalmi megértés és a tanítványnevelés „termékeny talaja” erodálódhat.

Az észgép elveszi a rutinmunkát. Ez két dolgot jelenthet.

- ↗ **Felszabadul az idő** az érdekes kérdésekre. Kevesebb bürokrácia, több gondolkodás. A tudásháló nyitottabb és demokratikusabb lesz.
- ↘ Vagy: **a pályázatgyártás és a bírálás is gépesül**, és a Mark Gable Alapítvány végre teljes kapacitáson üzemel. Végtelen szöveg, végtelen bírálat, semmi kutatás. Plusz: 15 millió dollár 88 órára — a verseny anyagi, nem szellemi.

Ez **nem az észgépeken múlik.** A tudományt az intézményrendszere korrumpálja —
az pedig most megerősödhet, vagy össze is omolhat.

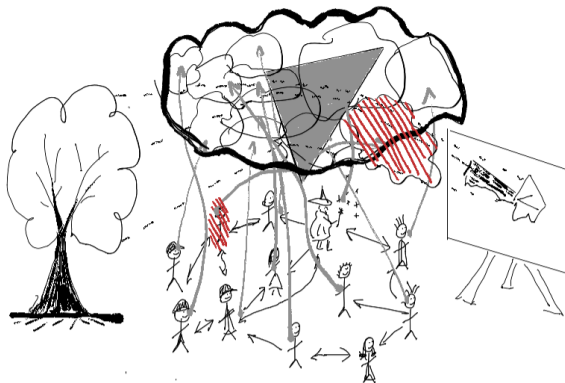
Amit most érdemes csinálni (fiataloknak?)

- **Tudj rendesen legalább egy vertikális nyelvet** — egy tömörítési kódot. A gép a nyelven *belül* dolgozik; nyelvet választani nem tud helyetted. A mérlegek és az entrópia: egy ilyen nyelv.
- **Olvass a saját szakterületeden kívül.** Az NS-vita: PDE, kinetikus elmélet, termodinamika, tudományszociológia egyszerre.
- **Kérdezz olyat, amire a gép nem tud válaszolni.** Hol a határ, azt csak próbálgatással tudod meg.
- **Találd meg, hol hibázik.** Elismeri, bocsánatot kér. Szedd ki a hízelgését: az igazság kemény.
- **Ne félj a perifériától.** Bolyai Marosvásárhelyen dolgozott. A központokban kiröhögnek, ha nem vagy divatos.
- **És gondolkodj magyarul.** Más szóbokrok más kapcsolatokat adnak ingyen. Munkaeszköz, nem büszkeség.

Wignernek igaza volt: **örvendetes, ha a gép érti.**

De a megértés attól még a mi dolgunk marad.

Köszönöm a figyelmet!



Fontosabb források — I. (tudomány, MI)

- Yuval Noah Harari: *Nexus* (2024). Szilárd Leó: *The Mark Gable Foundation* (1948, in: *The Voice of the Dolphins*, 1961).
- VP: Magyarul gondolkodni (qubit 2026 április 1) és egyéb munkák.
- Ted Chiang: *Életem története* (1998). Carse: *Finite and Infinite Games*; Koestler: *Alvajárók*. Hermann Hesse: *Üveggyöngyjáték* (1943)
- Barabási Albert-László: *Képlet* (2018). Hargittai István: *Ambíció és kíváncsiság* (2012).
- Csíkszentmihályi: *Kreativitás*. Nichols: *Death of Expertise* (2017). Prigogine–Stengers, Popper, Lakatos, Feyerabend.
- Matolcsi Tamás: *Ordinary Thermodynamics* (2005, 2017); *Spacetime Without Reference Frames* (1993, 2020).
- Terence Tao, Mathematics in the age of AI, arXiv:2608.16753.
- 2026. szeptember: Buckmaster nyilatkozata (cims.nyu.edu/~tristanb/statement.pdf); OpenAI, *Finite Time Blowup for Navier–Stokes* (kézirat + Lean, 09. 08.); T. Tao blogja (09. 07.); Clay Mathematics Institute közleménye (09. 11.); *A Severe Misalignment of AI in Mathematics*, 26 Fields-érmes nyílt levele (Zenodo, 09. 11.); Quanta, Nature, Science, Scientific American, Wikipedia: *Navier–Stokes priority controversy*.

Fontosabb források — II. (Navier–Stokes, termodinamika)

- C. L. Fefferman: *Existence and Smoothness of the Navier–Stokes Equation*, Clay Math. Inst.
- Leray, Acta Math. 63 (1934). Ladyzhenskaya (1958–59). Caffarelli–Kohn–Nirenberg, CPAM 35 (1982). Hadamard (1902). Eckart, Phys. Rev. 58 (1940).
- K. O. Friedrichs, P. D. Lax: *Systems of conservation equations with a convex extension*, PNAS 68 (1971) 1686. S. K. Godunov, Dokl. Akad. Nauk 139 (1961). G. Boillat, C. R. Acad. Sci. 278 (1974). T. Ruggeri, A. Strumia, Ann. IHP A 34 (1981).
- I.-S. Liu, Arch. Rat. Mech. Anal. 46 (1972) 131. Müller–Ruggeri: *Rational Extended Thermodynamics* (1998). Ruggeri–Sugiyama (2015, 2021).
- Gouin–Muracchini–Ruggeri, Cont. Mech. Thermodyn. 24 (2012) 505; Gouin–Ruggeri, IJNLM 47 (2012) 688 (Müller-paradoxon, EQ TI).
- Klainerman–Majda, CPAM 34 (1981), 35 (1982); Lions–Masmoudi, J. Math. Pures Appl. 77 (1998).
- Chapman–Cowling: *Non-Uniform Gases*. Golse–Saint-Raymond, Invent. Math. 155 (2004). Deng–Hani–Ma (2025), Hilbert 6.
- Peshkov–Romenski, Cont. Mech. Thermodyn. 28 (2016) 85. Chorin, J. Comput. Phys. 2 (1967). Ilyin–Rykov–Zelik, Physica D 376 (2018) 171.
- Xin, CPAM 51 (1998); Xin–Yan, CMP 321 (2013). Buckmaster–Vicol, Ann. Math. 189 (2019). Chen–Hou, PNAS 122 (2025). Córdoba–Martínez-Zoroa(–Zheng), arXiv:2309.08495, 2410.22920; Ann. PDE 11 (2025); ARMA 250 (2026). Tao, JAMS 29 (2016).
- Alpöge–Buckmaster (2026. 09. 07.). Petrillo–Glimm, arXiv:2609.23868 (2026. 09. 22.). Hou–Wang–Yang (2026, Leray–Hopf nemegyértelműség).

Melléklet: a főmező (Godunov–Boillat–Ruggeri) — a tétel duális alakja

$\partial_t F^0(u) + \partial_i F^i(u) = f$, kiegészítő mérleg $\partial_t s + \partial_i J^i = \Sigma$, s konkáv.

Főmező és Legendre-transzformáció

$$u' = \frac{\partial(-s)}{\partial u}, \quad s' = u' \cdot F^0 + s, \quad J'^i = u' \cdot F^i + J^i, \quad F^0 = \frac{\partial s'}{\partial u'}, \quad F^i = \frac{\partial J'^i}{\partial u'}.$$

$$\frac{\partial^2 s'}{\partial u' \partial u'} \partial_t u' + \frac{\partial^2 J'^i}{\partial u' \partial u'} \partial_i u' = P, \quad \frac{\partial^2 s'}{\partial u' \partial u'} \succ 0.$$

Euler-gáz (egyatomos): a főmező egyensúlyi komponensei = Liu-multiplikátorok

$$\Lambda_\rho|_E = \frac{1}{T} \left(g - \frac{v^2}{2} \right), \quad \Lambda_{v_i}|_E = \frac{v_i}{T}, \quad \Lambda_e|_E = -\frac{1}{T}, \quad g = e + \frac{p}{\rho} - Ts.$$

Előjelek konvenciófüggők ($\pm s$, $\pm \Lambda$); a multiplikátorok a $(\rho, \rho v, \rho(e + v^2/2))$ mérlegekhez tartoznak. A tömegmérleghez konjugált komponens $p/(\rho T)$ tagot tartalmaz: a nyomás a kémiai potenciálon át a sűrűséghez kötött. A konzervatív változós bizonyítás a főszövegben; a kettő ugyanannak a szimmetriának két koordinátázása.

Ted Chiang: *Életed története* — és a variációs elvek

Film: *Érkezés*, 2016.

A megértés kulcsa:

A fizikusok akkor jutnak dűlőre a heptapodokkal, amikor rájönnek, hogy **Fermat elvével** kell kezdeni, nem $F = ma$ -val. Az idegeneknek a *variációs* megfogalmazás a természetes.

Miért éppen az?

- A hatáselv *látszólag*(?) teleologikus: mintha a fény „tudná”, hova fog megérkezni.
- A heptapodok az időt egyszerre látják. Nekik ez nem látszat, hanem a természetes olvasat.
- Az **írásuk** is ilyen: a **szemagramma** nincs időben kibontva — az egész mondat egyszerre íródik.



Heptapod szemagramma

Nem nyelvi különbség: a **fogalmi szerveződés** mássága.

Ez a szublingvisztikus szint.

Melléklet (új): az előtörténet, ami a főszövegből kimaradt

1934	Leray: gyenge megoldások, energia-egyenlőtlenség; önhasonló robbanás javaslata.
1982	Caffarelli–Kohn–Nirenberg: a szinguláris halmaz $\mathcal{P}^1$ -mértéke nulla.
1996/2003	Nečas–Růžička–Šverák: nincs Leray-féle önhasonló robbanás; Escauriaza–Seregin–Šverák: L^3 -kritérium.
2014	Luo–Hou: numerikus Euler-robbanás peremmel. 2016: Tao, „averaged” NS robbanása (szuperkritikusság mint akadály).
2019	Buckmaster–Vicol: gyenge NS-megoldások nemegyértelműsége (konvex integráció) — az admissibilis osztályon kívül.
2021	Elgindi: erő nélküli $C^{1,\alpha}$ Euler-robbanás ($\mathbb{R}^3$, perem nélkül).
2022	Albritton–Brué–Colombo: <i>hajtott</i> NS Leray–Hopf-megoldásai nem egyértelműek. Chen–Hou: gépi bizonyítás Euler-robbanásra peremmel. MRRS: kompresszibilis implózió.
2023–25	Córdoba–Martínez-Zoroa(–Zheng): „végtelen kaszkád”. Buckmaster + DeepMind: instabil önhasonló profilok (PINN).
2025. 09.	Hou–Wang–Yang: erő nélküli NS Leray–Hopf nemegyértelműsége (gépi, nem lektorált).
2026. 08–09.	Alpöge–Buckmaster(–Coiculescu); OpenAI; Clay „active”; Fields-levél.
