Relativisztikus pont-mechanika

Balog János

MTA Wigner FK RMI, Budapest

- Pont-mechanika és kauzalitás, “no-interaction” tétel
- Relativisztikus és prediktív mechanika
- Kanonikus relativisztikus mechanika
- Ruijsenaars-Schneider modellek ($1 + 1$ dim)
- Fizikai alkalmazások

Wigner RMI ELMO szeminárium, 2014. június 20.

A kutatás a TÁMOP-4.2.4.A/2-11/1-2012-0001 azonosító számú Nemzeti Kiválóság Program – Hazai hallgatói, illetve kutatói személyi támogatást biztosító rendszer kidolgozása és működtetése konvergencia program című kiemelt projekt keretében zajlott. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg.

Kauzalitás és pont-mechanika

Relativisztikus részecskefizika = relativisztikus kvantumtérelmélet (QFT)

Relativisztikus pont-mechanika: szükséges / lehetséges?

- Dirac ('49): három lehetséges formalizmus (nem bizonyította, hogy konzisztensek)
  "instant form": pillanatszerű távolhatás

- Thomas, Havas, Foldy,...

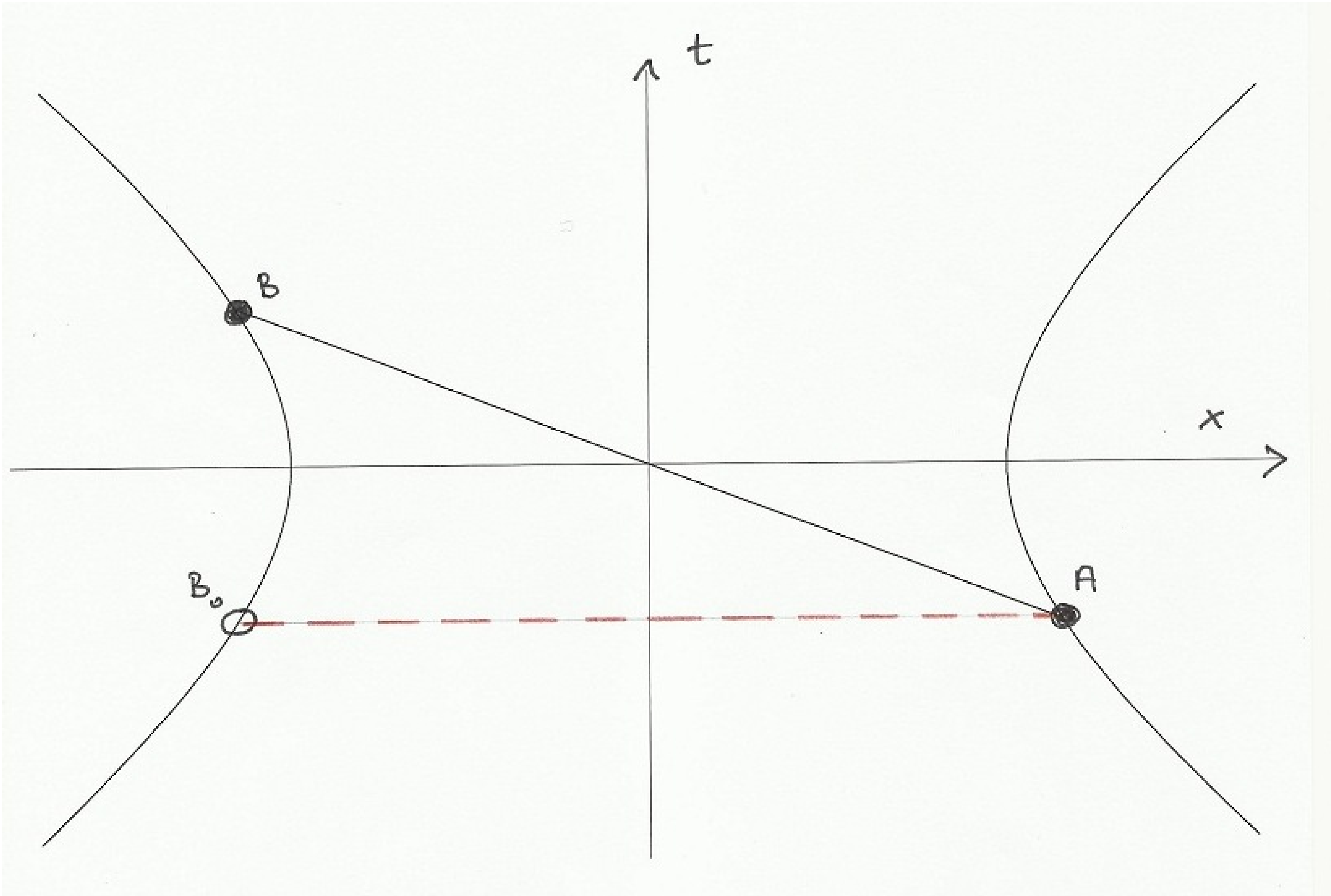

Figure 1: Ha az egyik részecske mozgásállapotát az A téridő pontban megváltoztatjuk, erről a másik részecske legkorábban a B téridőpontban értesülhet, a hatás nem terjedhet pillanatszerűen az egyidejű B_o téridő pontba.

- Currie, Jordan, Sudarshan '63, Leutwyler '65 “no-interaction” tétel

  szokásos kanonikus nechanika: $\{x_a^i\}_{a=1}^r$ $\{p_a^i\}_{a=1}^r$ kanonikus változók

  Hamilton-függvény: $\mathcal{H}(x,p)$

  további 9 Poincaré generátor, melyek geometriailag hatnak a részecske-koordinátákon (világvonal-feltétel WLC)

$$\Downarrow$$

  Csak szabad részecskerendszer a megoldás!

- Currie '66, Hill '67 $\{x_a^i\}$ koordináták kanonikusságát kell csak feladni
  $\Rightarrow$ Curie-Hill (CH) egyenletek

- '80-as évek: Todorov, Komar, Samuel, Sudarshan, Mukunda...
  konkrét konstrukciók (Hamiltoni redukció)
  $1+1$ dimenziós példák

Pont-mechanika (M)

x^μ: téridő koordináták $\qquad \mu = 0, 1, 2, 3$

x^i: tér koordináták $\quad i = 1, 2, 3 \qquad x^0 = ct$

$\{x^i_a(t)\}^r_{a=1}$ r-részecske trajektóriák

alternatív leírás: $\{x^\mu_a(\tau_a)\} \quad x^0_a(\tau_a) \sim ct \quad \frac{\mathrm{d}x^0_a}{\mathrm{d}\tau_a} > 0$

fázistér: $\xi = (\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^m)$

pont-mechanikai rendszer: $\{x^i_a(t;\xi)\}$ függvények

Példák:

- természetes fázistér: $y_a^i = x_a^i(0) \qquad v_a^i = \dot{x}^i(0) \quad [6r]$
- szórási problémák: $\{\bar{y}_a^i, \bar{v}_a^i\} \quad [6r]$

$$\lim_{t \to -\infty} \left\{x_a^i(t) - \left(\bar{y}_a^i + \bar{v}_a^i t\right)\right\} = 0$$

- absztrakt fázistér: $\{p^A, q^A\} \quad A = 1, 2, \ldots, f \quad [2f]$

Relativisztikus pont-mechanika (RM)

Poincaré transzformáció:

$$\tilde{x}^\mu = -A^\mu + L^\mu{}_\nu x^\nu \qquad L^\mu{}_\nu L_{\mu\omega} = \eta_{\nu\omega}$$

10 generátor: $\{\hat{H}, \hat{P}_i, \hat{L}_i, \hat{K}_i\}$

kommutációs relációk:

$$[\hat{H}, \hat{P}_i] = 0 \qquad [\hat{H}, \hat{L}_i] = 0 \qquad [\hat{H}, \hat{K}_i] = \hat{P}_i$$

$$[\hat{L}_i, \hat{P}_j] = \epsilon_{ijm}\hat{P}_m \qquad [\hat{L}_i, \hat{L}_j] = \epsilon_{ijm}\hat{L}_m \qquad [\hat{L}_i, \hat{K}_j] = \epsilon_{ijm}\hat{K}_m$$

$$[\hat{P}_i, \hat{P}_j] = 0 \qquad [\hat{P}_i, \hat{K}_j] = \frac{1}{c^2}\,\delta_{ij}\hat{H} \qquad [\hat{K}_i, \hat{K}_j] = -\frac{1}{c^2}\,\epsilon_{ijm}\hat{L}_m$$

$\{x_a^\mu(\tau_a)\}_{a=1}^r \quad \sim \quad X(\xi)$ részhalmaz téridőben

Poincaré transzformált trajektóriák:

$$\Lambda(g;X): \quad \Lambda\big(g_2;\Lambda(g_1;X)\big) = \Lambda(g_2g_1;X)$$

Relativisztikus mechanika

Létezik $L(g;\xi)$: Poincaré hatása a fázistéren

$$\boxed{X\big(L(g;\xi)\big) = \Lambda\big(g;X(\xi)\big)}$$

Csoporthatás:

$$X\Big(L\big(g_2;L(g_1;\xi)\big)\Big) = \Lambda\Big(g_2;X\big(L(g_1;\xi)\big)\Big) = \Lambda\big(g_2;\Lambda(g_1;\xi)\big)$$

$$= \Lambda(g_2g_1;\xi) = X\big(L(g_2g_1;\xi)\big)$$

$$L\big(g_2;L(g_1;\xi)\big) = L(g_2g_1;\xi)$$

$$\tilde{x}^i_a = -A^i + L^i{}_j x^j_a + L^{io} x^o_a \qquad \tilde{x}^o_a = -A^o + L^o{}_j x^j_a + L^{oo} x^o_a$$

argumentum: $x^o_a = ct_a \quad \Rightarrow \quad \tilde{x}^o_a = ct$

$$\begin{aligned} x^i_a\big(t; L(g,\xi)\big) &= -A^i + L^i{}_j x^j_a(t_a;\xi) + L^{io} ct_a \\ &\quad - A^o + L^o{}_j x^j_a(t_a;\xi) + L^{oo} ct_a = ct \end{aligned}$$

for infinitesimal transformations: $g = 1 + \varepsilon^A T^A + \mathrm{O}(\varepsilon^2)$

$$A^\mu \approx \alpha^\mu \qquad L^\mu{}_\nu \approx \delta^\mu{}_\nu + \lambda^\mu{}_\nu \qquad t_a \approx t + \sigma_a$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^A \hat{Q}^A x^i_a(t) &= -\alpha^i + \lambda^i{}_j x^j_a(t) + \sigma_a \dot{x}^i_a(t) + \lambda^{io} ct \\ &\quad - \alpha^o + \lambda^o{}_j x^j_a(t) + c\sigma_a + \lambda^{oo} ct = 0 \end{aligned}$$

időeltolás

$$\varepsilon^A \hat{Q}^A = \alpha^o \hat{H}/c \qquad \alpha^i = \lambda^\mu{}_\nu = 0$$

$$\sigma_a = \alpha^o/c \qquad \alpha^o \hat{H} x_a^i = \alpha^o \dot{x}_a^i$$

$$\boxed{\hat{H} x_a^i = \dot{x}_a^i}$$

téreltolás

$$\varepsilon^A \hat{Q}^A = \alpha^j \hat{P}_j \qquad \alpha^o = \lambda^\mu{}_\nu = 0$$

$$\sigma_a = 0 \qquad \alpha^j \hat{P}_j x_a^i = -\alpha^i$$

$$\boxed{\hat{P}_j x_a^i = -\delta_{ij}}$$

forgás

$$\boxed{\hat{L}_j x_a^i = \epsilon_{jik} x_a^k}$$

Lorentz boost

$$\varepsilon^A \hat{Q}^A = u^j \hat{K}_j \qquad \alpha^\mu = \lambda^i{}_j = 0 \qquad \lambda^j{}_o = \lambda^o{}_j = u^j/c$$

$$\sigma_a = -u^j x_a^j / c^2 \qquad u^j \hat{K}_j x_a^i = -u^k x_a^k \dot{x}_a^i / c^2 + u^i t$$

$$\boxed{\hat{K}_j x_a^i = -\tfrac{1}{c^2} x_a^j \dot{x}_a^i + \delta^{ij} t}$$

Világvonal feltételek (WLC)

$$y_a^i = x_a^i(0) \qquad v_a^i = \dot{x}_a^i(0) \qquad \mu_a^i = \ddot{x}_a^i(0)$$

$$\hat{H} y_a^i = v_a^i \qquad \hat{H} v_a^i = \mu_a^i$$

$$\begin{cases} \hat{P}_i y_a^k = -\delta_{ik} \\ \hat{L}_i y_a^k = \epsilon_{ikl} y_a^l \\ \hat{K}_i y_a^k = -\frac{1}{c^2} y_a^i v_a^k \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{P}_i v_a^k = 0 \\ \hat{L}_i v_a^k = \epsilon_{ikl} v_a^l \\ \hat{K}_i v_a^k = \delta_{ik} - \frac{1}{c^2} v_a^i v_a^k - \frac{1}{c^2} y_a^i \mu_a^k \end{cases}$$

Prediktív mechanika (PM)

Természetes fázistér ($6r$ dimenziós)

$$\xi : \qquad \{y_a^i, v_a^i\}$$

trajektóriák: $x_a^i(t; y, v) \qquad x_a^i(0; y, v) = y_a^i \qquad \dot{x}_a^i(0; y, v) = v_a^i$

gyorsulás: $\ddot{x}_a^i(t; y, v)$

$$\Downarrow$$

Newtoni egyenletek: $\boxed{\ddot{x}_a^i(t) = \mu_a^i\big(x(t), \dot{x}(t)\big)}$

dinamika:

$$\hat{H} = \sum_a \left\{ v_a^i \frac{\partial}{\partial y_a^i} + \mu_a^i(y, v) \frac{\partial}{\partial v_a^i} \right\}$$

Prediktív relativisztikus mechanika (PRM)

Poincaré generátorok:

$$\hat{P}_i = -\sum_a \frac{\partial}{\partial y_a^i}$$

$$\hat{L}_i = \epsilon_{ijk} \sum_a \left\{ y_a^k \frac{\partial}{\partial y_a^j} + v_a^k \frac{\partial}{\partial v_a^j} \right\}$$

$$\hat{K}_i = \sum_a \left\{ -\frac{1}{c^2} y_a^i v_a^k \frac{\partial}{\partial y_a^k} + \left(\delta_{ik} - \frac{1}{c^2} v_a^i v_a^k - \frac{1}{c^2} y_a^i \mu_a^k \right) \frac{\partial}{\partial v_a^k} \right\}$$

Poincaré Lie algebra relációk: megszorítások a μ_a^i gyorsulásokra

eltolás: μ_a^i csak a relatív távolságoktól függhet

forgás: μ_a^i a vektor-változók vektoriális függvénye

$[\hat{H}, \hat{K}_i] = \hat{P}_i \quad \Rightarrow$ Currie-Hill (CH) egyenletek

$$\sum_b \left\{ \frac{\partial \mu_a^i}{\partial v_b^k} + \frac{1}{c^2}(x_a^k - x_b^k) v_b^j \frac{\partial \mu_a^i}{\partial x_b^j} + \frac{1}{c^2}(x_a^k - x_b^k) \mu_b^j \frac{\partial \mu_a^i}{\partial v_b^j} - \frac{1}{c^2} v_b^k v_b^j \frac{\partial \mu_a^i}{\partial v_b^j} \right\}$$

$$+ \frac{2}{c^2} v_a^k \mu_a^i + \frac{1}{c^2} \mu_a^k v_a^i = 0$$

PRM-1 $\{\mathcal{H}, \mathcal{P}_i, \mathcal{L}_i, \mathcal{K}_i\}$ mennyiségek léteznek

PRM-2 fázistéren szimplektikus struktúra (Poisson zj)

$\hat{H} = \{\mathcal{H}, \dots\} \qquad \hat{P}_i = \{\mathcal{P}_i, \dots\}$ etc.

Kanonikus relativisztikus mechanika (CRM)

- szimplektikus struktúra a fázistéren
- 10 Poincaré generátor adott: $\{\mathcal{H}, \mathcal{P}_i, \mathcal{L}_i, \mathcal{K}_i\}$
- $\{y_a^i\}$ trajectória változók adottak
- Világvonal feltételek teljesülnek:

$$\{\mathcal{P}_i, y_a^k\} = -\delta_{ik}$$

$$\{\mathcal{L}_i, y_a^k\} = \epsilon_{ikl}\, y_a^l$$

$$\{\mathcal{K}_i, y_a^k\} = -\tfrac{1}{c^2}\, y_a^i \{\mathcal{H}, y_a^k\}$$

Ruijsenaars-Schneider modellek

$1+1$ dimenziós "toy" modellek

$1+1$ dim Poincaré: $\{\mathcal{H},\mathcal{P}\}=0 \quad \{\mathcal{H},\mathcal{K}\}=\mathcal{P} \quad \{\mathcal{P},\mathcal{K}\}=\mathcal{H}/c^2$

WLC: $\{\mathcal{P},x_a\}=-1 \qquad \{\mathcal{K},x_a\}=-x_a\{\mathcal{H},x_a\}/c^2$

<u>RS Ansatz:</u>

kanonikus változók: $\{q_a,\theta_b\}=\delta_{ab} \qquad a,b=1,2,\ldots r$

Poincaré generátorok:

$$\mathcal{H}=mc^2\sum_a \mathrm{ch}\theta_a\, V_a \qquad \mathcal{P}=mc\sum_a \mathrm{sh}\theta_a\, V_a \qquad \mathcal{K}=-\frac{1}{c}\sum_a q_a$$

$$V_a=\prod_{b\neq a} f(q_a-q_b) \qquad\qquad f>0 \quad \text{ps fv}$$

$$\{\mathcal{H}, \mathcal{P}\} = \frac{m^2 c^3}{2} \sum_a \frac{\partial}{\partial q_a} \prod_{b \neq a} f^2(q_a - q_b) = 0$$

megoldás: $f^2(q) = a + b\,\mathfrak{p}(q)$ Weierstrass függvény

degenerált (speciális) esetek: $f(x) = \sqrt{1 + W(x)}$

$$W(x) = \begin{cases} \frac{g^2}{x^2} & \text{type I (rac.)} \\ \frac{\gamma^2}{\mathrm{sh}^2 \omega x} & \text{type II (hip.)} \\ \frac{\gamma^2}{\sin^2 \omega x} & \text{type III (trig.)} \end{cases}$$

Trajektória változók:

$$\boxed{Q_a(x;q,\theta) = \exp\{x\hat{P}\}\, q_a} \qquad a = 1, 2, \ldots, r$$

monoton: $\frac{\mathrm{d}Q_a(x)}{\mathrm{d}x} < 0$

$$\Downarrow$$

egyértelmű: $\boxed{Q_a(x_a) = 0}$

nem kanonikus! $\{x_a, x_b\} \neq 0$

Fizikai alkalmazások

- klasszikus elektronelmélet (Feynman-Wheeler/Rohrlich)

- Kompakt kettős rendszerek ált. rel.-ben (gravitációs hullámforrás)

  Futamase-Itoh Blanchet et al. Damour-Jaranowski-Schäfer

  – (pontszerűnek tekinthető) 2 fekete lyuk vagy neutroncsillag
  – mozgásegyenletek poszt-Newtoni $(1/c^2)$ kifejtésben: 3, 3 1/2 rend (legújabban 4 rend)
  – CH egyenletek (poszt-Newtoni kifejtésben) teljesülnek
  – regularizálással kapcsolatos nemegyértelműség 3. PN rendben a Poincaré szimmetria megkövetelésével oldható fel