

Felületi törvény és univerzális korrekciók rendezetlen rendszerekben

Kovács István

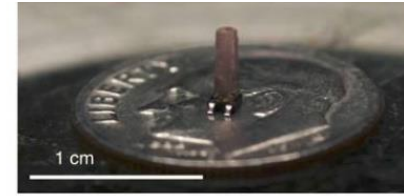
MTA WIGNER FK SZFI

Szegedi Tudományegyetem



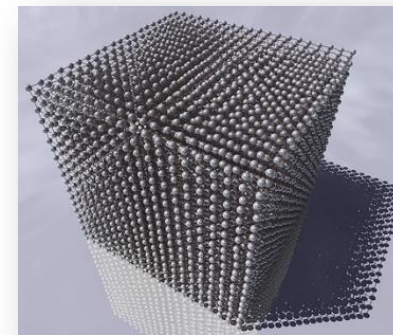
Az előadás vázlatja

- Kísérleti motivációk
- Elméleti motivációk
- Folytonos szimmetria: XX-modell
 - erősen rendezetlen renormálási csoport
 - végtelenül rendezetlen viselkedés
- Diszkrét szimmetria: Kvantum Ising modell
 - rendezetlen
 - hígított
 - homogén
- Eredmények
 - 1, 2 és 3 dimenzióban
- Kitekintés



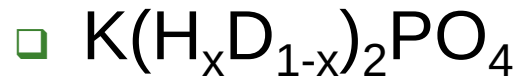
$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^L J_i \hat{\mathbf{S}}_i \cdot \hat{\mathbf{S}}_{i+1}$$

$$\mathcal{H} = - \sum_{(i,j)} J_{ij} \sigma_i^x \sigma_j^x - \sum_i h_i \sigma_i^z$$

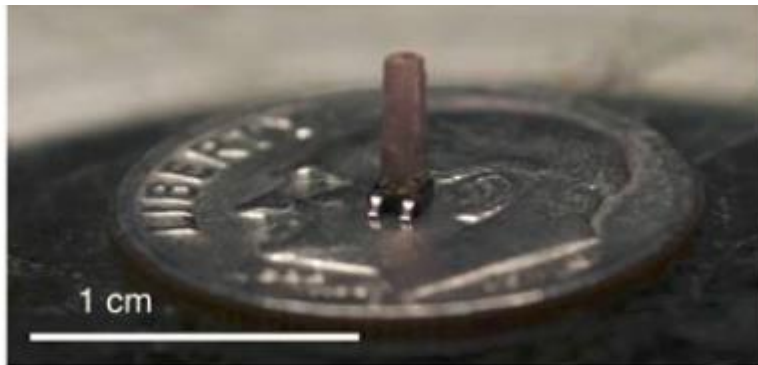


Kísérleti motivációk

$$\mathcal{H} = - \sum_{(i,j)} J_{ij} \sigma_i^x \sigma_j^x - \sum_i h_i \sigma_i^z$$



Ultrahideg gázok, pl. Rb véletlen kölcsönhatással



Science 30 April 1999:
Vol. 284 no. 5415 pp. 779-781
DOI: 10.1126/science.284.5415.779

REPORT

Quantum Annealing of a Disordered Magnet

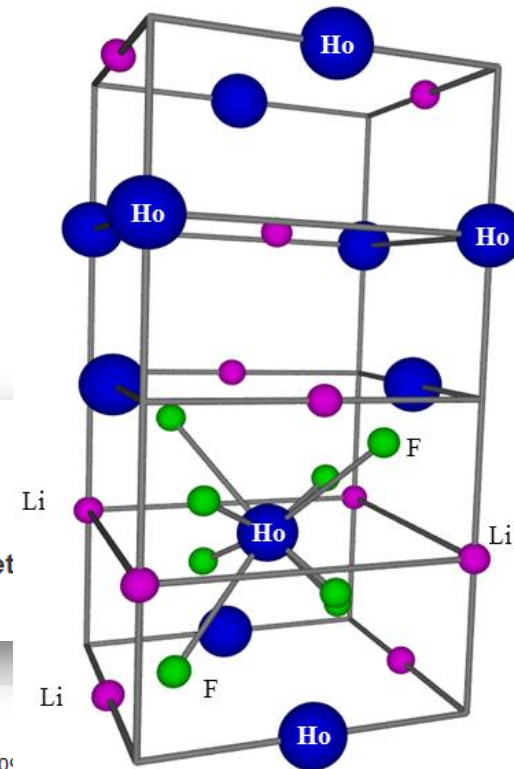
J. Brooke¹, D. Bitko¹, T. F., Rosenbaum^{1,2} and G. Aeppli²

Letters to Nature

Nature **413**, 610-613 (11 October 2001) | doi:10.1038/350
Accepted 16 August 2001

Tunable quantum tunnelling of magnet domain walls

J. Brooke^{1,2}, T. F. Rosenbaum¹ & G. Aeppli²



$$a = b = 5.176 \text{ \AA}$$

$$c = 10.75 \text{ \AA}$$

Vol 448 | 2 August 2007 | doi:10.1038/nature06050

nature

LETTERS

A ferromagnet in a continuously tunable random field

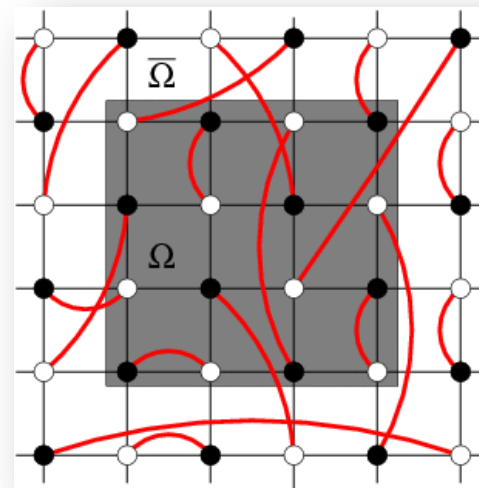
D. M. Silevitch¹, D. Bitko², J. Brooke³, S. Ghosh⁴, G. Aeppli⁵ & T. F. Rosenbaum¹

$$\mathcal{H}_{\text{Dipolar}} = \frac{1}{2} \frac{\mu_0}{4\pi} \mu_B^2 g_J^2 \sum_{ij} \left[\frac{\mathbf{J}_i \cdot \mathbf{J}_j}{r_{ij}^3} - \frac{3(\mathbf{J}_i \cdot \mathbf{r}_{ij})(\mathbf{J}_j \cdot \mathbf{r}_{ij})}{r_{ij}^5} \right]$$

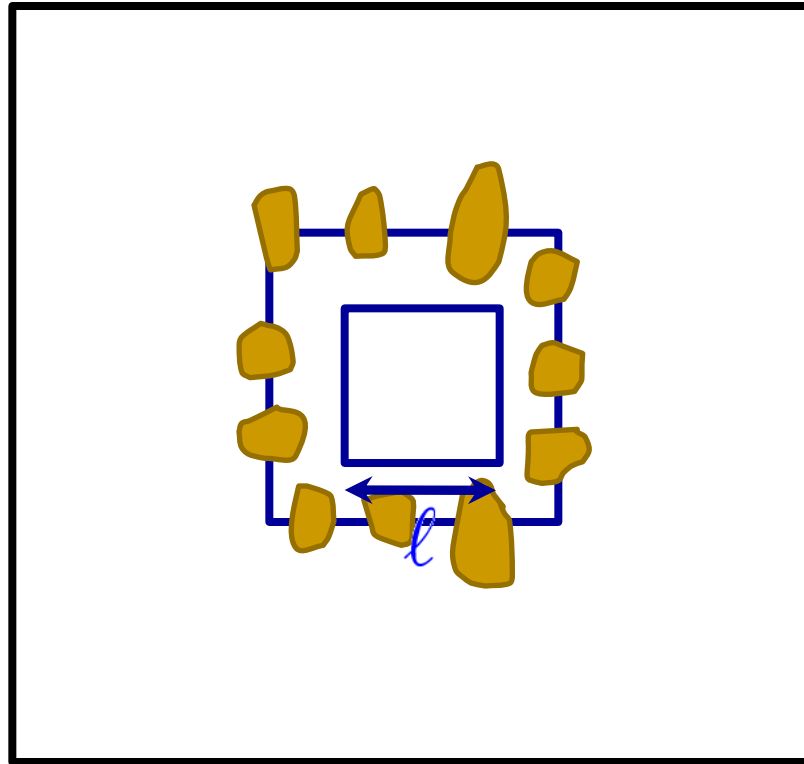
hígítás és random csatolások

Elméleti motivációk

- A log szingularitás önmagában jelzi a folytonos fázisátalakulást
 - Használható a kritikus pont lokalizálására is
 - A rendparamétert sem szükséges ismerni
 - Az előfaktor jellemző az univerzalitás osztályra
 - DMRG: a centrális töltés kényelmesen meghatározható
 - Az értéke megszabja a DMRG eljárás hatékonyságát
-
- Érdekesség: az összefonódás gyakran geometrializálódik

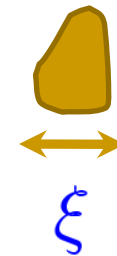


Kiindulás: „felületi törvény” $\mathcal{S}(\ell) \sim \ell^{d-1}$



Hogyan változik a mérettel?

klaszter



Kritikus pontban:

$$\xi \sim |\delta|^{-\nu}$$

$$\mathcal{S}_{2D}(\ell) \sim \ell$$

Folytonos szimmetria: antiferromágneses XX-lánc

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^L J_i \hat{\mathbf{S}}_i \cdot \hat{\mathbf{S}}_{i+1}$$

- Szabad-fermion technikák numerikusan alkalmazhatók
- Pontos eredmények, de a megértéshez nem feltétlenül jutunk közelebb
- Szemléletes kép: erősen rendezetlen RG

$$\mathcal{H}'_{i-1,i+2} = \frac{J_{i-1}J_{i+1}}{2J_i} \hat{\mathbf{S}}_{i-1} \cdot \hat{\mathbf{S}}_{i+2}$$

- log változóknak praktikus $\Omega = \max_i \{J_i\}$ $\beta_i = \ln \frac{\Omega}{J_i}$
- Véletlen szinglet állapot



- Egzaktul megoldható

$$\Gamma = \ln \frac{\Omega_0}{\Omega}$$

$$\frac{dP(\beta)}{d\Gamma} = \frac{\partial P(\beta)}{\partial \beta} + P(0) \int_0^\infty d\beta_1 \int_0^\infty d\beta_2 \delta_{(\beta-\beta_1-\beta_2)} P(\beta_1) P(\beta_2). \quad P(\beta) = \frac{\chi}{\Gamma} e^{-\chi\beta/\Gamma}$$

Folytonos szimmetria: antiferromágneses XX-lánc

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^L J_i \hat{\mathbf{S}}_i \cdot \hat{\mathbf{S}}_{i+1}$$

- Végtelenül rendezetlen viselkedés
- Rendezetlenség dominál a termikus és kvantum fluktuációk felett

$$\ell^\psi \sim \Gamma = \ln 1/E$$

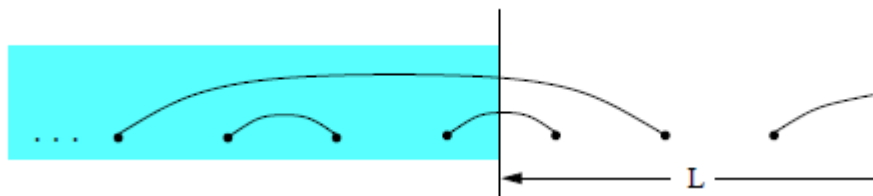
- Aszimptotikusan egzaktta válik az erősen rendezetlen RG
 - szélesednek a log-csatolások

- Összefonódási entrópia: geometriai értelmezés

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_a |\downarrow\rangle_b - |\downarrow\rangle_a |\uparrow\rangle_b)$$

$$\mathcal{S} = -\text{Tr}_{\mathcal{A}}(\rho_{\mathcal{A}} \log_2 \rho_{\mathcal{A}})$$

- Elmetszett „klaszterek” száma:



$$S_L = \frac{1}{3} \cdot 2 \ln \Gamma + k = \frac{\ln 2}{3} \log_2 L + k$$

$$\tilde{c} = 1 \cdot \ln 2$$

- Damle-Huse hierarchia (s nagyságú spinek esetén)

$$1/\psi = 2s + 1, \quad \chi = 2s$$

$$S_L = \frac{1}{3} \ln(2S + 1) \log_2 L$$

Végtelenül rendezetlen kritikus viselkedés

Egyre nagyobb skálán tekintve a rendezetlenség hatása 3 féleképpen változhat

eltűnik	→ változatlan kritikus exponensek
konstanshoz tart	→ szokásos skálázás új exponensekkel
minden határon túl nő	→ végtelenül rendezetlen viselkedés

- A viselkedés nagy skálán is inhomogén
- Tipikus $\neq$ átlagos
- Az átlagot a ritka régiók, realizációk dominálják
- Extrém lassú dinamika
- A z dinamikai exponens formálisan végtelenül nagy

$$\tau \sim L^z \quad \text{helyett} \quad \ln \tau \sim L^\psi$$

- A renormálási eljárás során
 - a log-csatolások eloszlása minden határon túl szélesedik
 - 2 effektív csatolás aránya végtelenhez tart
 - a renormálási lépések egzaktta válnak

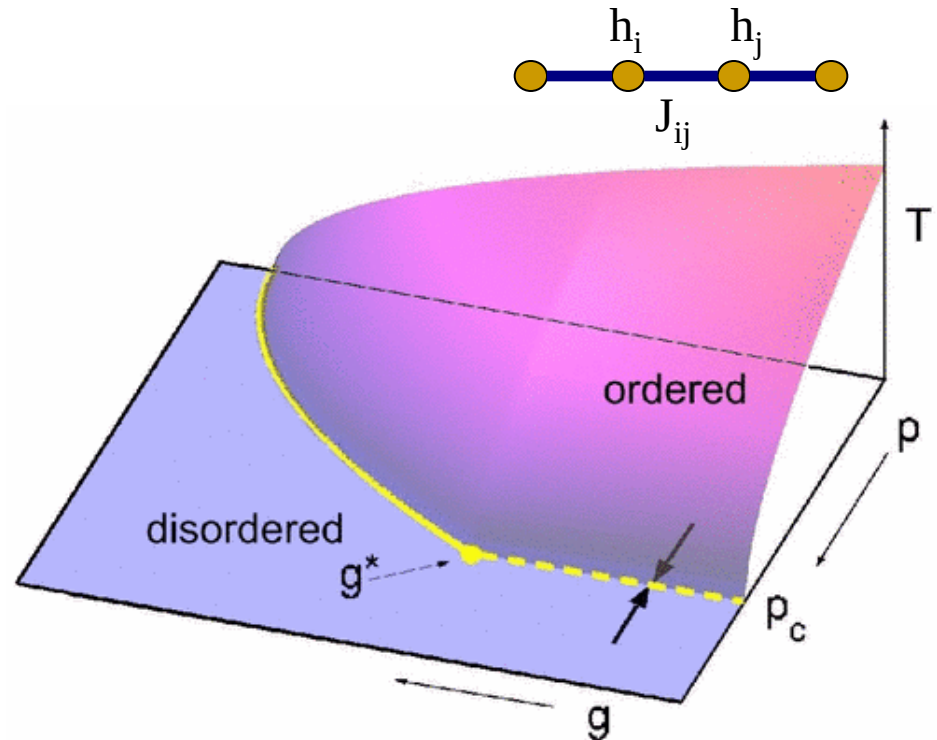
MC szimulációk szempontjából ez egy rémálom!

Diszkrét szimmetria: kvantum Ising modell

$$\mathcal{H} = - \sum_{(i,j)} J_{ij} \sigma_i^x \sigma_j^x - \sum_i h_i \sigma_i^z$$

- Ferromágneses csatolások
- Másodrendű fázisátalakulás: $d \geq 1$
- Kontroll paraméter: $g = \langle h \rangle$ vagy p
- A kritikus viselkedés a $d+1$ dimenziós (anizotróp) klasszikus modellel áll kapcsolatban
- $d < 4$ Harris-kritérium: a gyenge rendezetlenség is **releváns**

termikus, kvantum és
rendezetlenségi fluktuációk



T. Vojta and J. Schmalian Phys. Rev. Lett. 95, 237206

- Rendezetlenség jelenlétében:
 - kritikus pontban „végtelenül rendezetlen”
 - kritikus pont körül: „erősen rendezetlen” **Griffiths fázis**
 - Végtelenül rendezetlen esetben a frusztráció irreleváns**

A vizsgált esetek

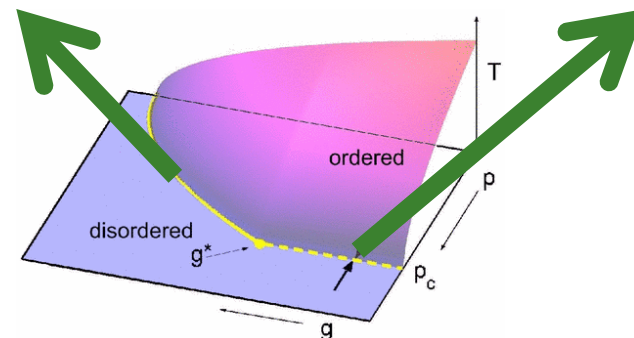
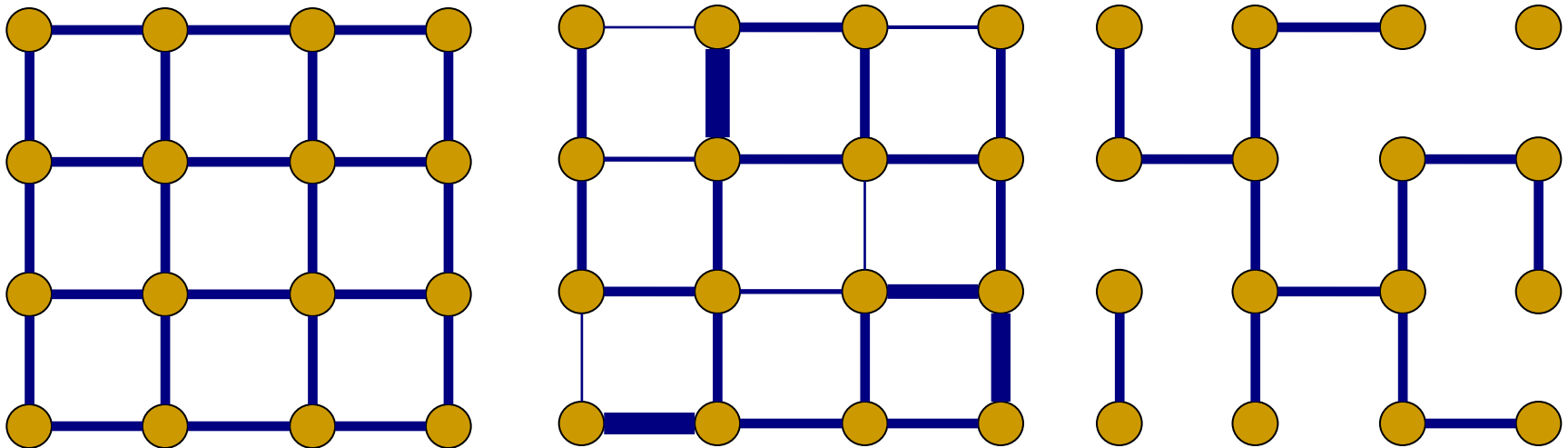
$$\mathcal{H} = - \sum_{(i,j)} J_{ij} \sigma_i^x \sigma_j^x - \sum_i h_i \sigma_i^z$$

■ homogén

■ rendezetlen

■ hígított

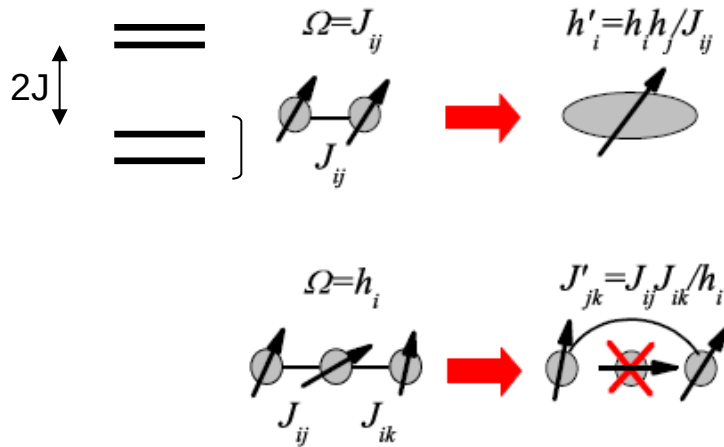
A homogén modellről tudjuk a legkevesebbet!



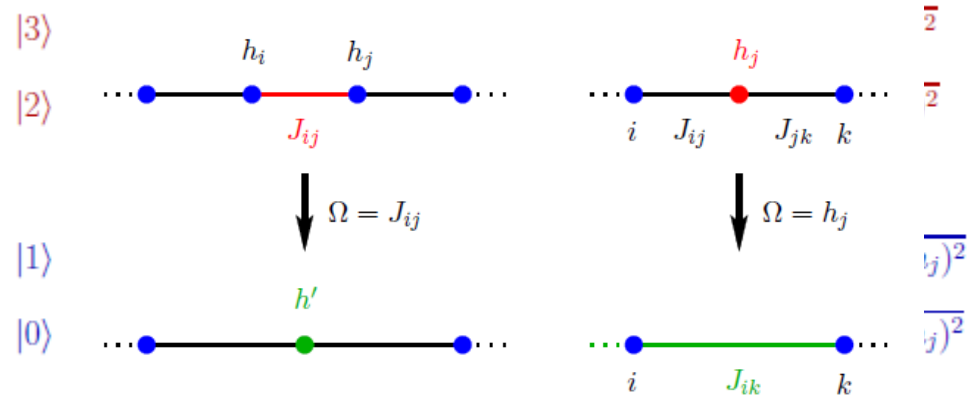
Erősen rendezetlen RG

$$\mathcal{H} = - \sum_{(i,j)} J_{ij} \sigma_i^x \sigma_j^x - \sum_i h_i \sigma_i^z$$

■ Szabályok:



■ lánc $\rightarrow$ lánc



D. S. Fisher (1994): analitikus megoldás 1D-ben

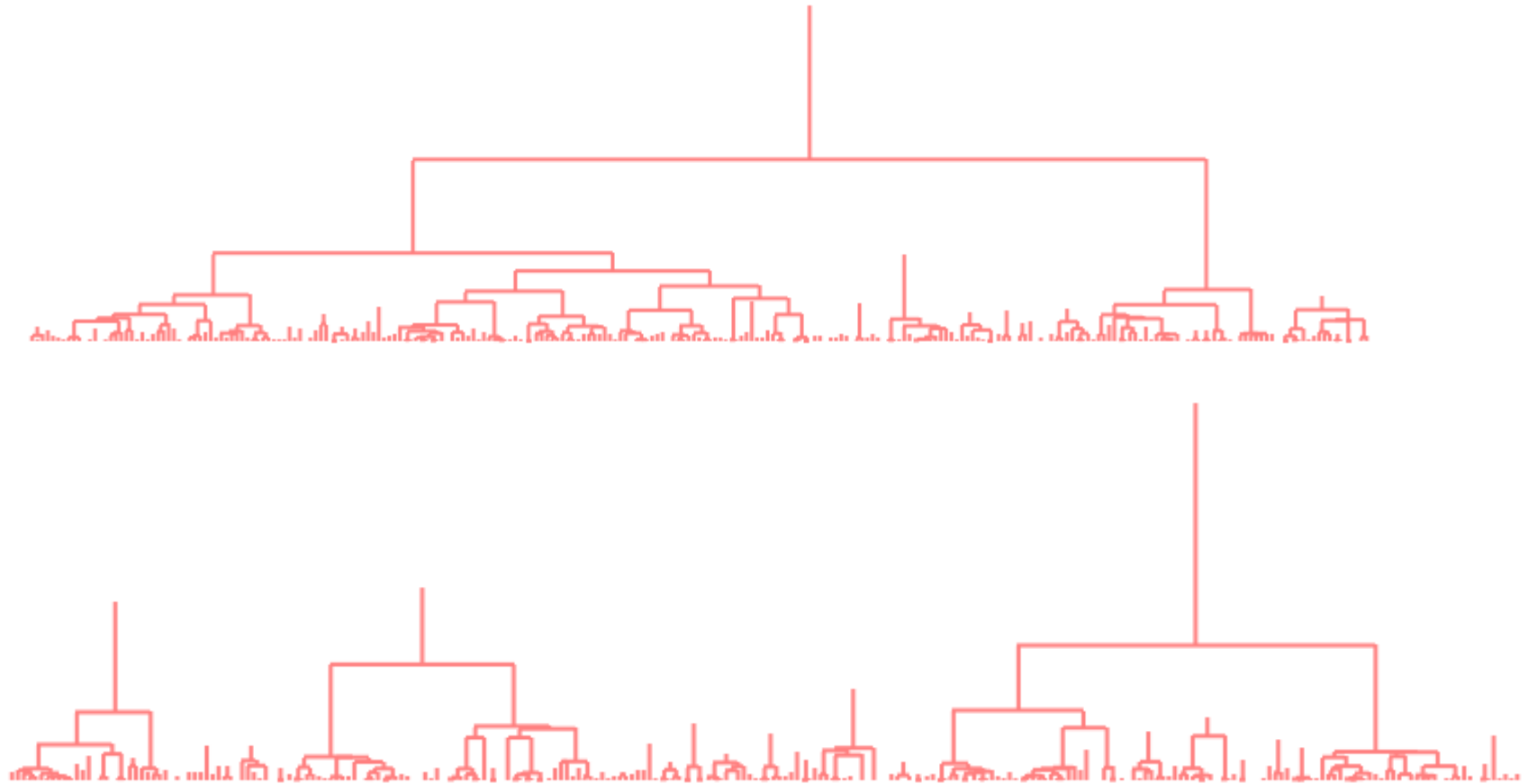
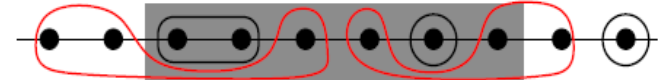
- nemlineáris, integro-differenciál egyenletrendszer az eloszlásokra
- az eljárás aszimptotikusan egzakt a kritikus pont körül
- a rendezetlenség erőssége és alakja nem számít

$$\frac{dR}{d\Omega} = R(J, \Omega) [P(\Omega, \Omega) - R(\Omega, \Omega)] - P(\Omega, \Omega) \int_J^\Omega dJ' R(J', \Omega) R\left(\frac{J}{J'}, \Omega\right) \frac{\Omega}{J'},$$

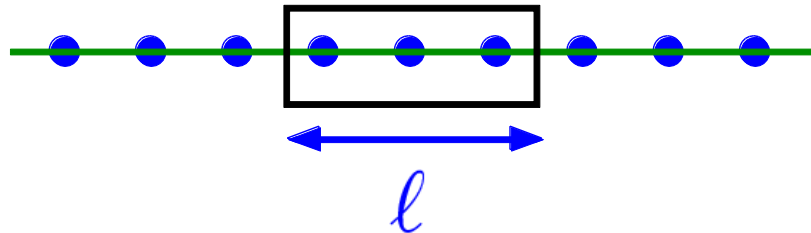
$$\frac{dP}{d\Omega} = P(h, \Omega) [R(\Omega, \Omega) - P(\Omega, \Omega)] - R(\Omega, \Omega) \int_h^\Omega dh' P(h', \Omega) P\left(\frac{h}{h'}, \Omega\right) \frac{\Omega}{h'},$$

Összefonódás: elmetszett klaszterek

GHZ: $\frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\uparrow\ldots\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\ldots\downarrow\rangle)$



1d: logaritmus



Jordan-Wigner transzformáció $\rightarrow$ jól kezelhető szabad-fermion rendszer

A kritikus pontban logaritmus

■ Homogén: CFT

$$S_L^{(p)}(\ell) = \frac{c}{3} \log_2 \left[\frac{L}{\pi} \sin \left(\frac{\ell\pi}{L} \right) \right] + c_1$$

$$c = 1/2$$

C. Holzhey, F. Larsen, and F. Wilczek, Nucl. Phys. B (1994);
V. E. Korepin, PRL (2004)
P. Calabrese and J. Cardy, J. Stat. Mech. (2004)

Értelmezés: felület $\times$ log?

■ Rendezetlen

$$S_\infty(\ell) = \frac{c}{3} \log_2 \ell + c_1$$

$$c_{\text{eff}} = \ln 2 / 2$$

Szabad-fermion: numerikusan
Erősen rendezetlen RG: analitikusan is

G. Refael and J. E. Moore, PRL (2004)
F. Iglói, Yu-Ch. Lin, J. Stat. Mech. (2008)

Egzakt kapcsolat az XY (XX) és Ising modell között: F. Iglói, R. Juhász, arXiv:0709.3927

A kritikus pontban maximális

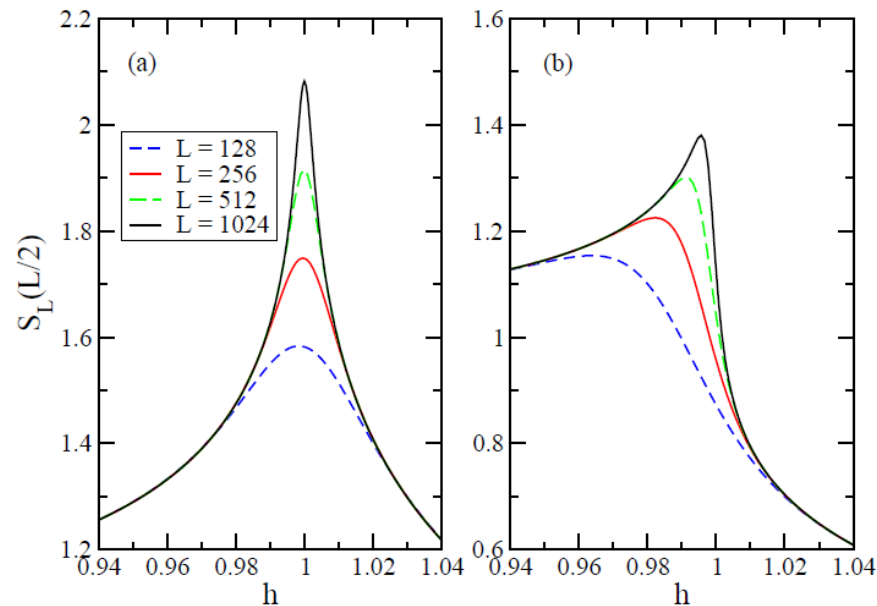
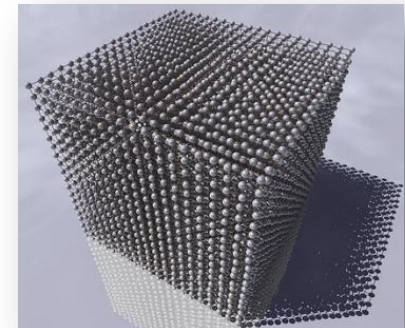
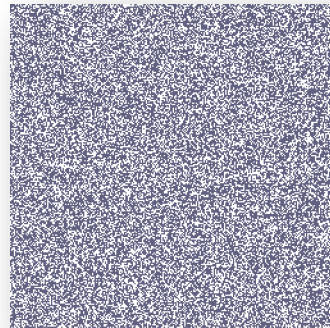
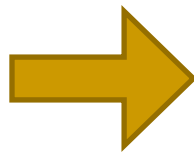
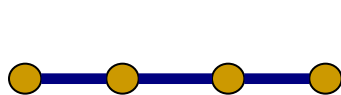


Figure 3. The entanglement entropy of a half of a chain with $J = 1$ as a function of the strength of the transverse field h , for periodic (a) and open (b) boundary conditions. On increasing the system size L , the maximum gets more pronounced, and the position of the maximum tends towards the critical point $h_c = 1$.

F. Iglói and Y.-C. Lin, J. Stat. Mech. P06004 (2008)

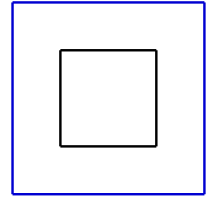
Kihívások magasabb dimenziókban

- Folytonos szimmetria esetén már nem lesz végtelenül rendezetlen
- Általában már nem működik a szabad-fermion leképezés
- Diszkrét szimmetriánál is csak numerikusan alkalmazhatók az RG technikák
- Az összefonódási entrópia általában nem a kritikus pontban maximális
- A vezető rendek nem univerzálisak
- A részrendszer alakja döntő tényezővé válhat



2D eredmények

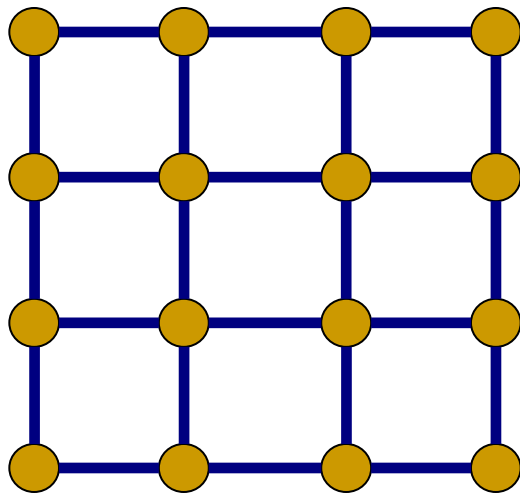
$$\mathcal{S}_{2D}(\ell) = a\ell + b \ln \ell$$



Felületi törvény univerzális sarok korrekcióval

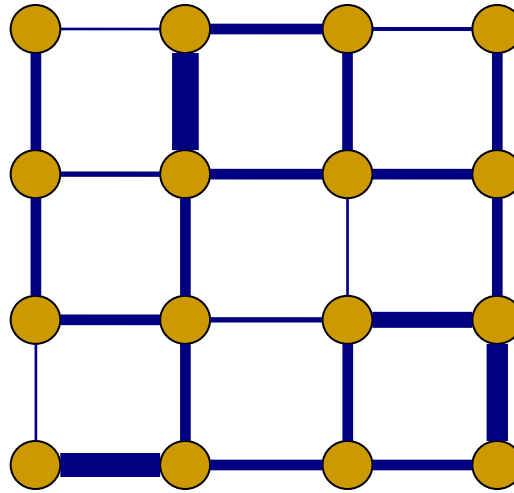
■ homogén

$$b = -0,0264(3)$$



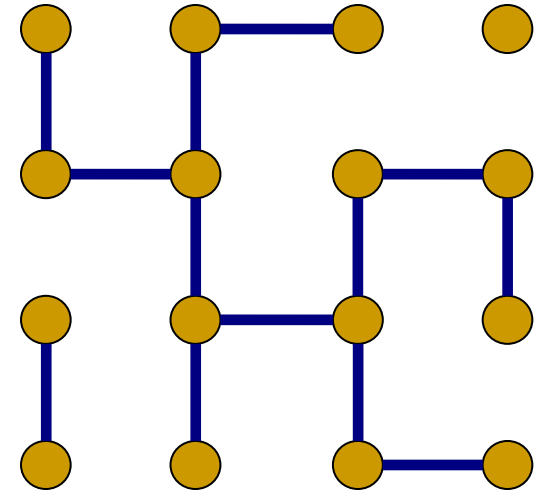
■ rendezetlen

$$b = -0,029(1)$$



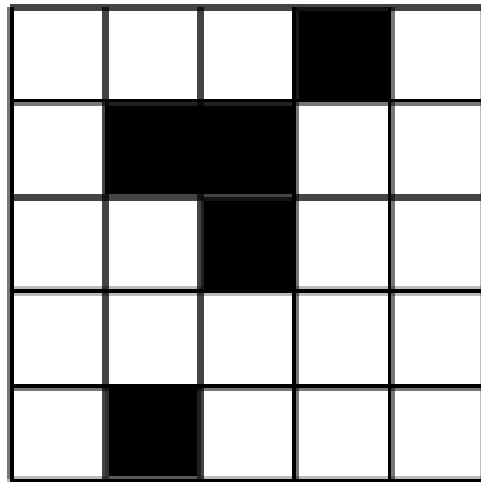
■ hígított

$$b = -0,0765735\dots$$



2D hígított modell: perkoláció

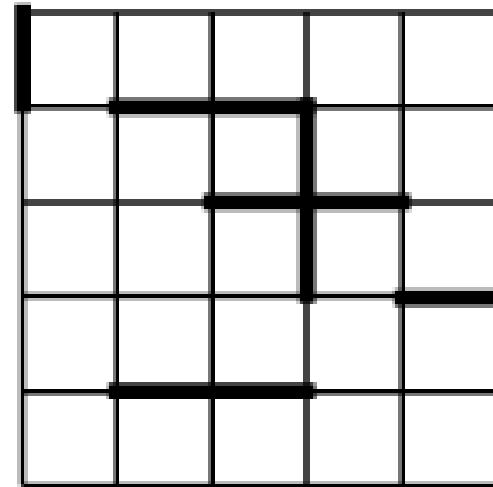
rácshely perkoláció



2D: $p_c \approx 0.592746$

3D: $p_c \approx 0.3116$

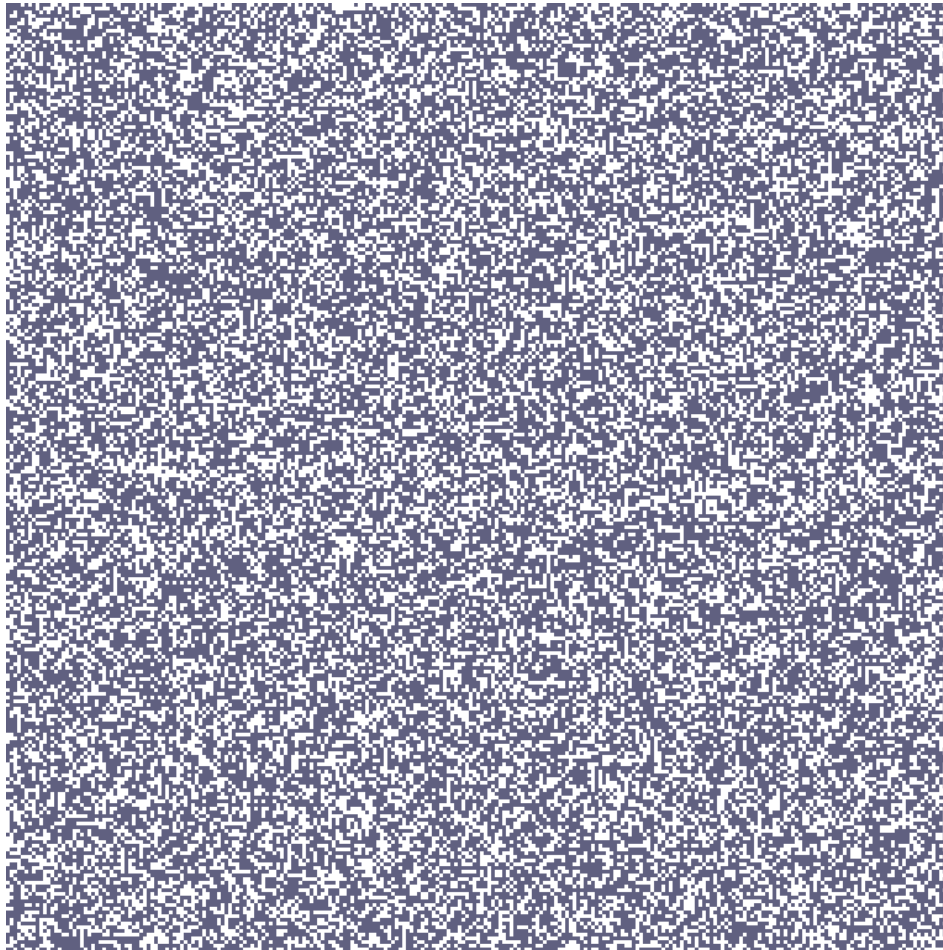
kötés perkoláció



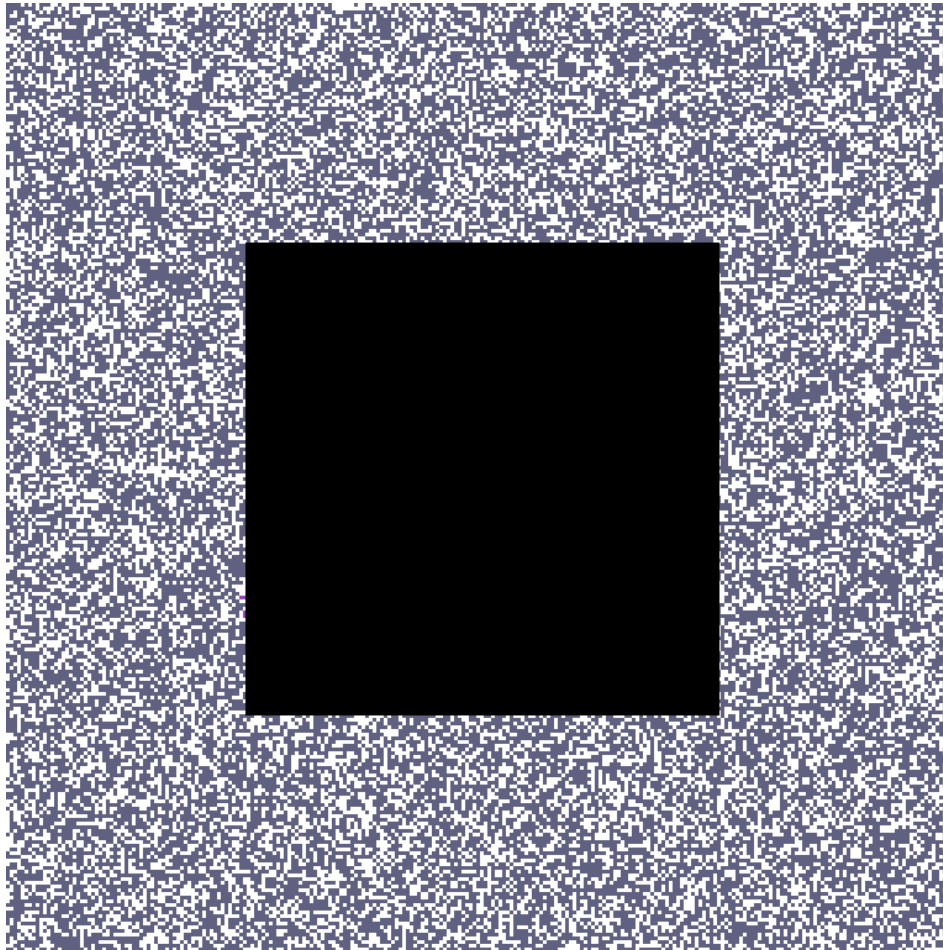
$p_c = 0.5$

$p_c \approx 0.24881$

Perkoláció

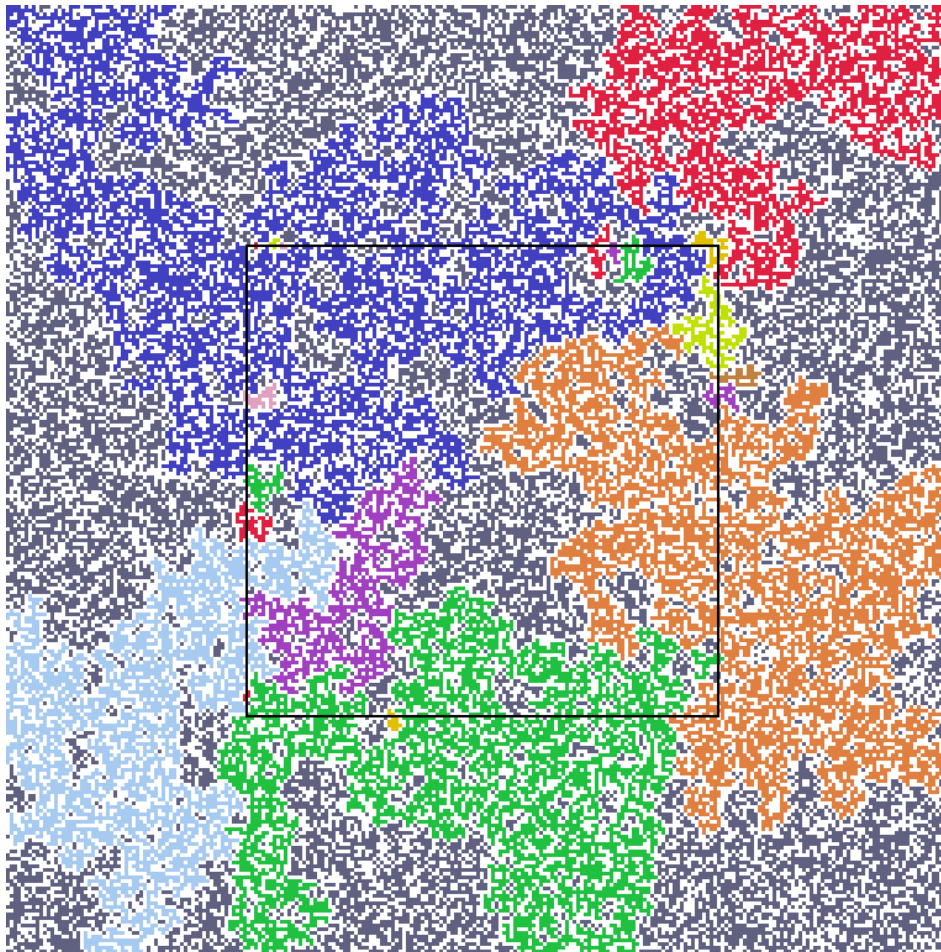


Négyzet részrendszer: sarkok



Mennyi klasztert metsz?

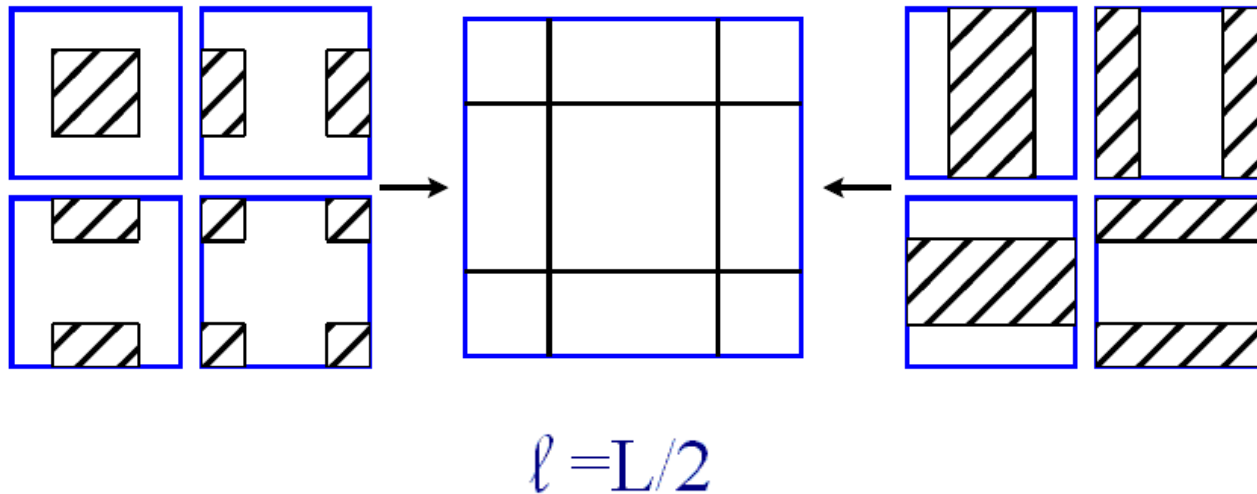
$$\mathcal{S}_{2D}(\ell) = a\ell + b \ln \ell$$



Első vizsgálat: R. Yu, H. Saleur and S. Haas, Phys. Rev. B 77, 140402(R) (2008).

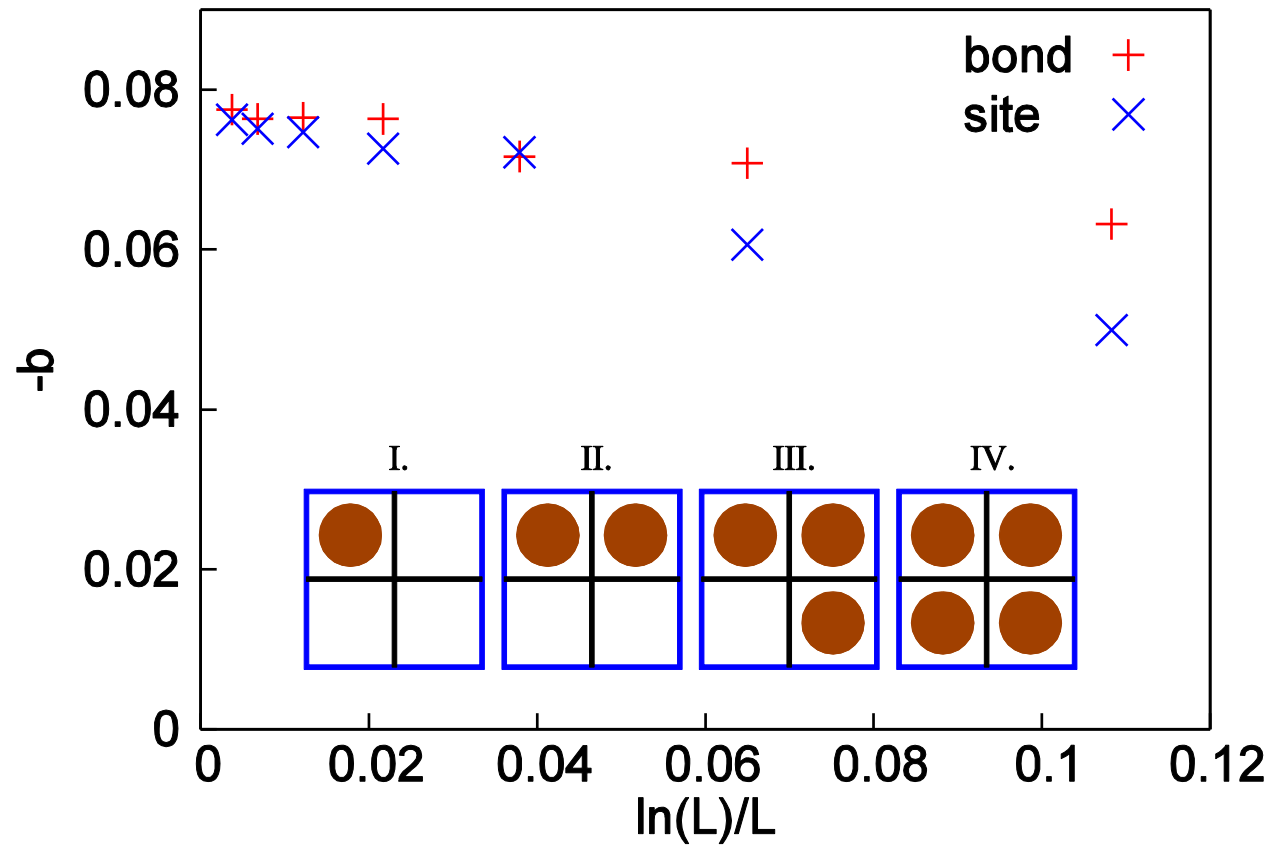
A logaritmus a sarkokból származik

Hogyan lehet megmutatni?



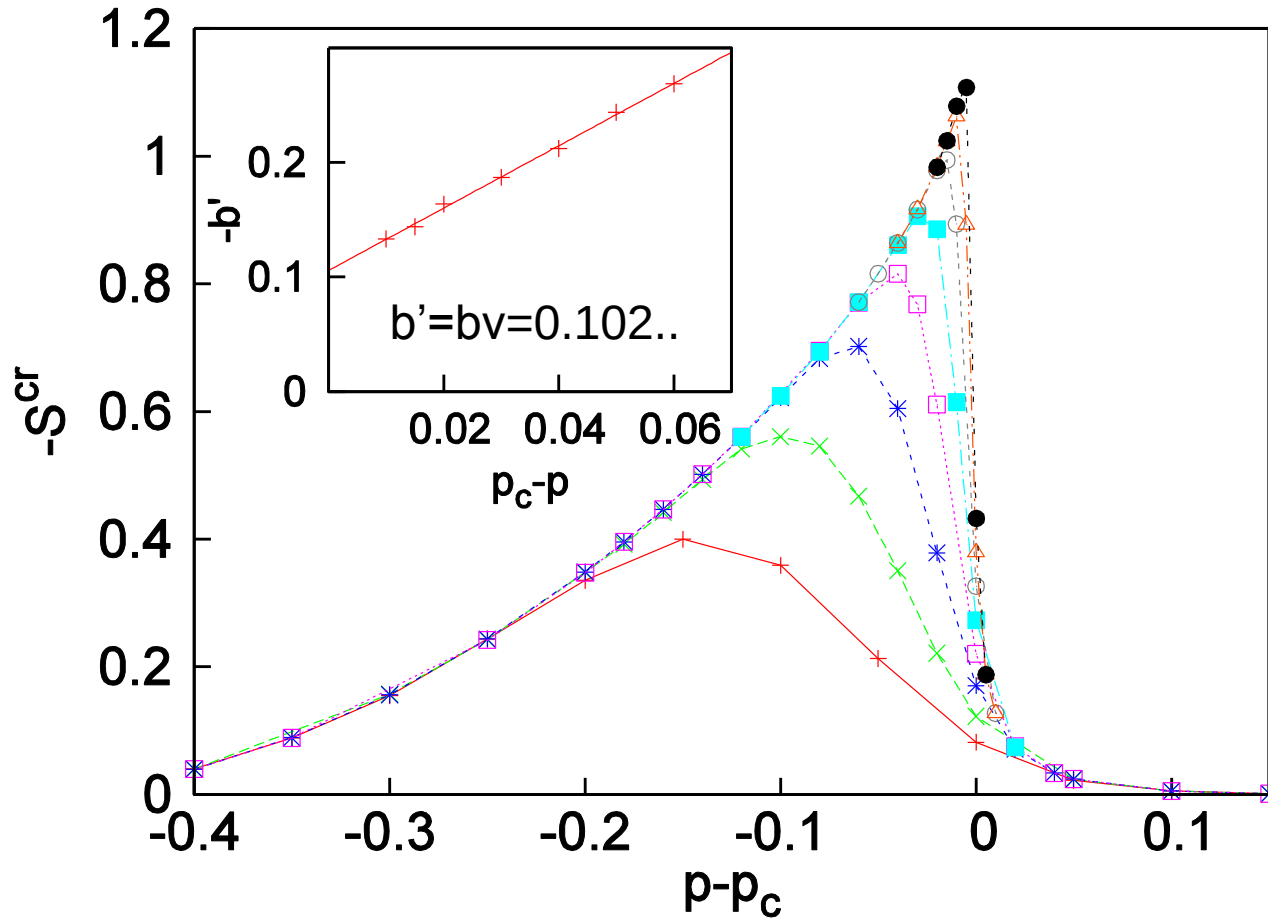
A különbség a sarkokból jön

A log korrekció univerzális



$$b = -0.077(1)$$

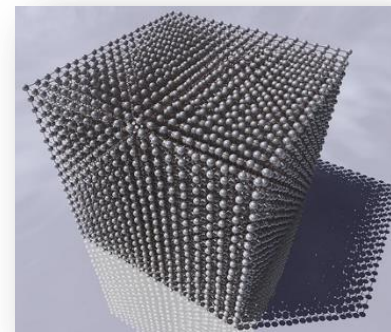
A divergáló korrelációs hossz következménye



Elmélet: szabadenergia véges rendszerekben

$$f = a\ell^3 + b\ell^2 + c\ell + \boxed{d \ln \ell}$$

térfogat felület él sarok



Skálázási érv: V. Privman, Phys. Rev. B 38, 9261 (1988)

■ Q-állapotú Potts modell

$$H_p = -J_p \sum_{\langle i,j \rangle} \delta(s_i, s_j) \quad Z(Q) = \sum_s \prod_{\langle ij \rangle} \exp(K \delta_{s_i, s_j})$$

$$Z(Q) = \langle Q^{N_{\text{tot}}} \rangle = \sum_{\text{clusters}} Q^{N_{\text{tot}}} p^{N_{\text{open}}} (1-p)^{N_{\text{closed}}}$$

■ $Q \rightarrow 1$: perkoláció

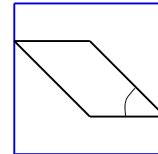
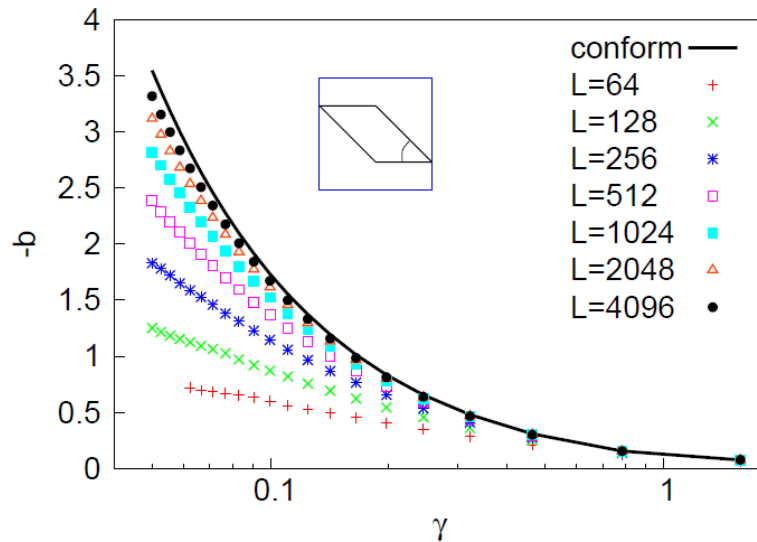
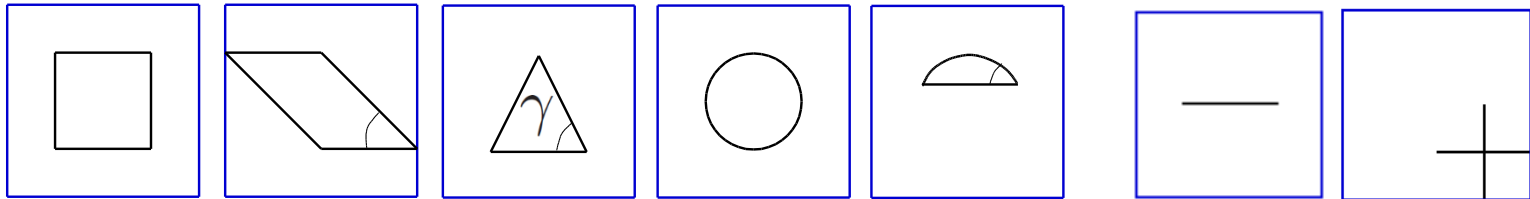
$$\langle N_{\text{tot}} \rangle = Q \frac{\partial \ln Z(Q)}{\partial Q}$$

■ $Q=2$: Ising modell

■ Folytonos fázisátalakulás: $Q \leq 4$ (2d), vagy $Q < 2,3$ (3d)

Más geometriák: szögfüggés ellenőrzése $al + b \ln \ell$

Cardy-Peschel formula:
$$b = \frac{\beta(Q)}{24} \sum_k \left(\frac{\gamma_k}{\pi} - \frac{\pi}{\gamma_k} \right)$$



$$-\frac{c'(1)}{12} \left[4 - \pi \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\pi - \gamma} + \frac{1}{\pi + \gamma} + \frac{1}{2\pi - \gamma} \right) \right]$$

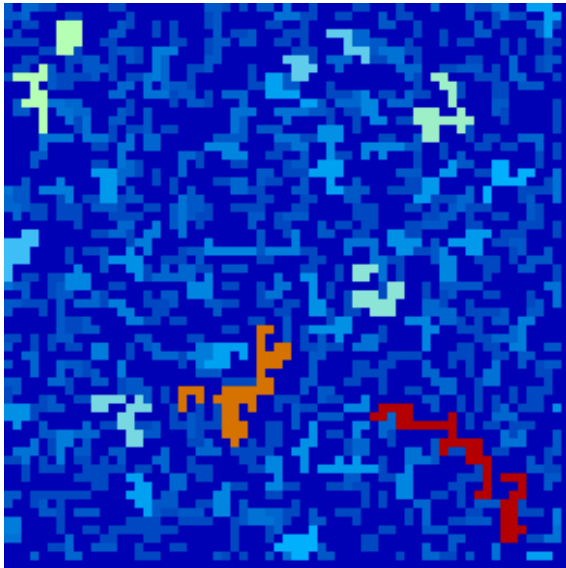


$$-\frac{c'(1)}{24} \left[6 - \pi \left(\frac{2}{\gamma} + \frac{1}{\pi - 2\gamma} + \frac{1}{\pi + 2\gamma} + \frac{2}{2\pi - \gamma} \right) \right]$$

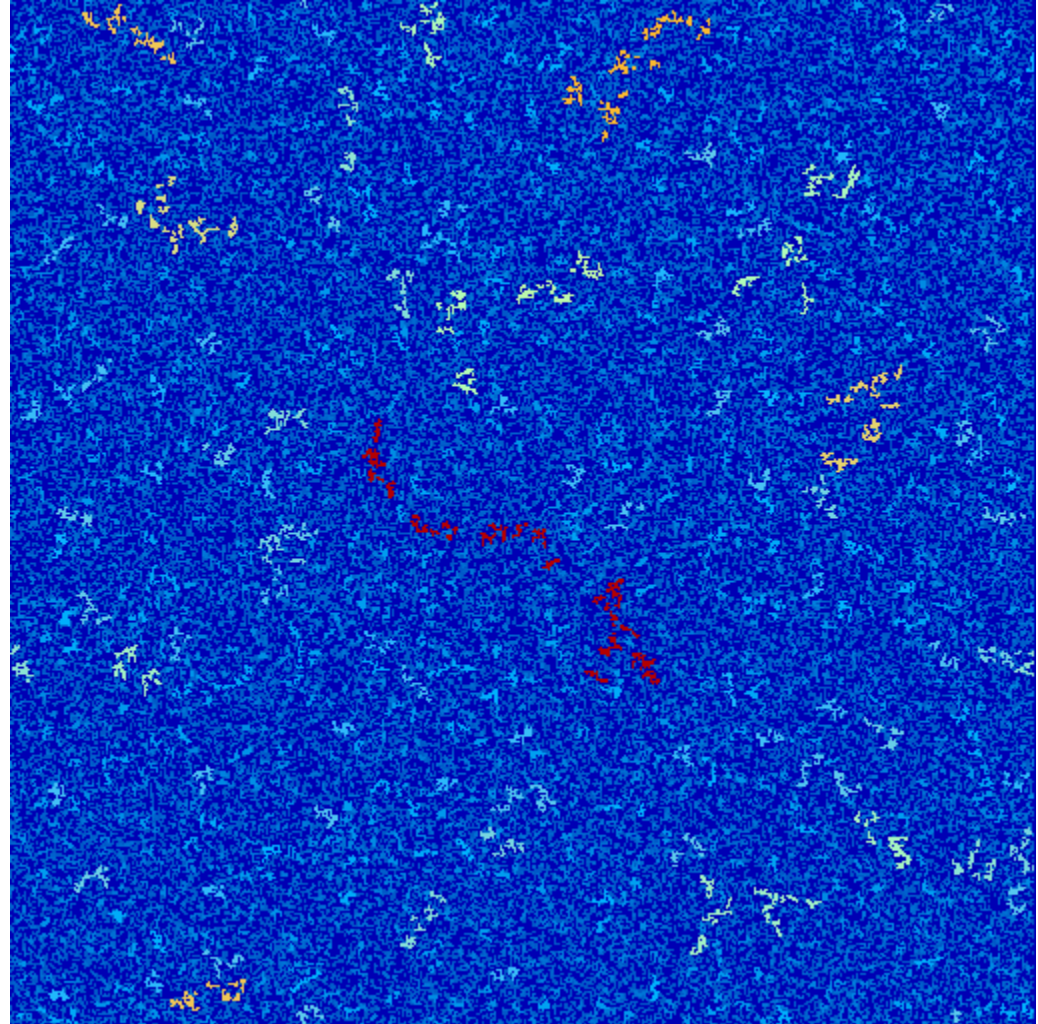
Rendezetlen eset: nem összefüggő klaszterek

L=512

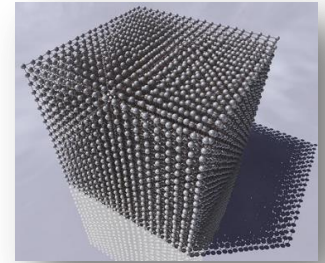
L=64



$$t \sim N \log N$$



3D: univerzális sarok logaritmus

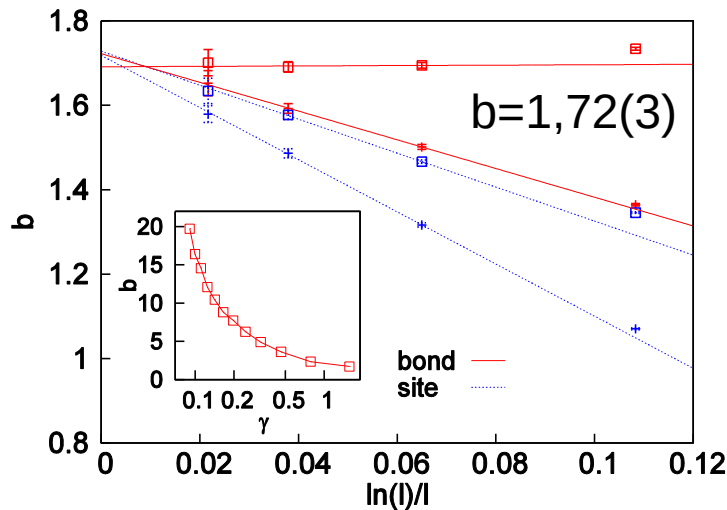


- homogén ■ hígított ■ rendezetlen
- $b \sim 0.012(?)$ $b = 1,72(3)$ $b = 0,012(2)$

T. Devakul, R. Singh
arXiv:1407.0084

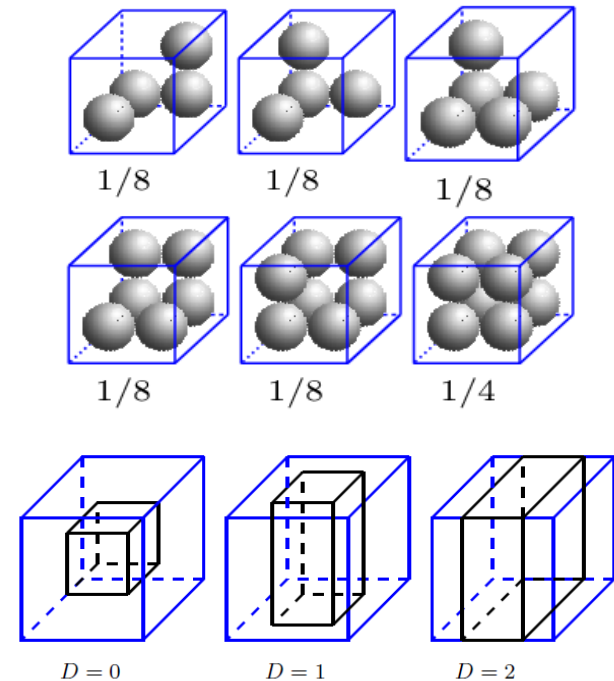
I. A. K. and F. Iglói
arXiv:1402.6535

I. A. K. and F. Iglói
arXiv:1108.3942



$$\langle N_{\Gamma} \rangle = a_2 \ell^2 + a_1 \ell + b \ln \ell$$

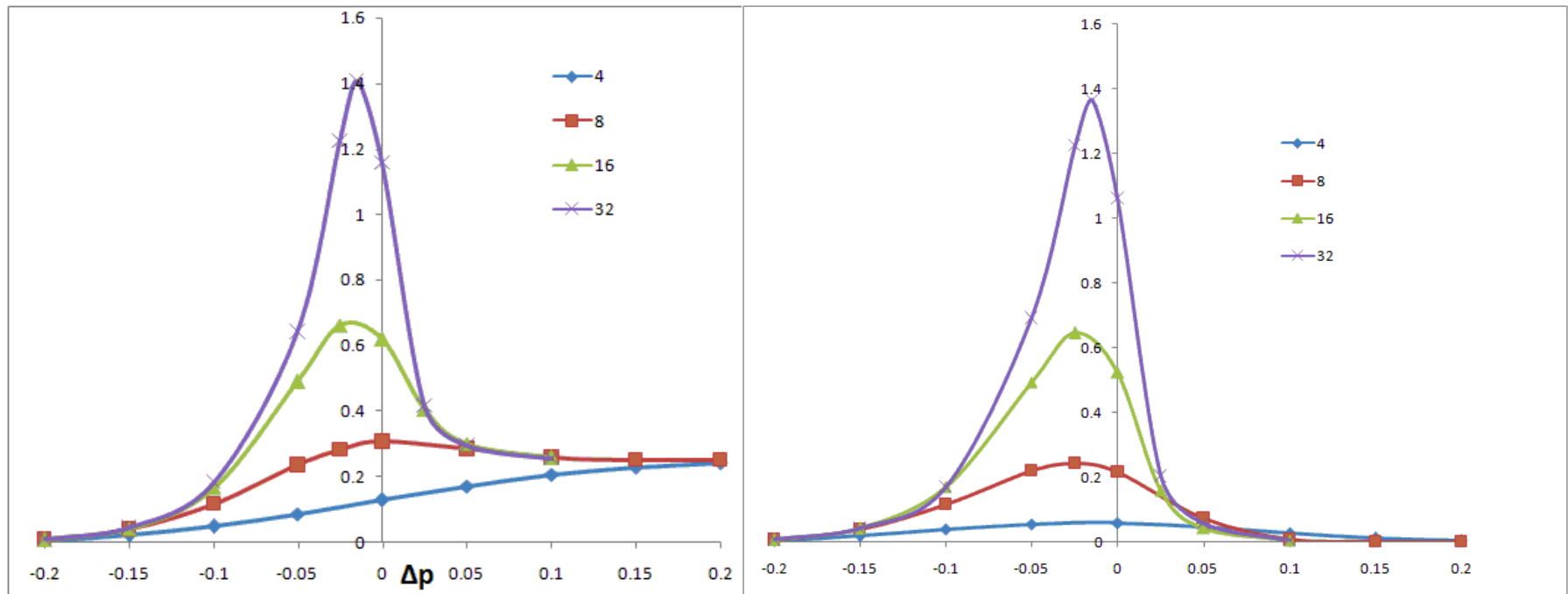
Az előjel váltakozik d-vel



$$\mathcal{S}_0^{(d)}(0) = \sum_{D=0}^{d-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^D \binom{d}{D} \mathcal{S}_D^{(d)}$$

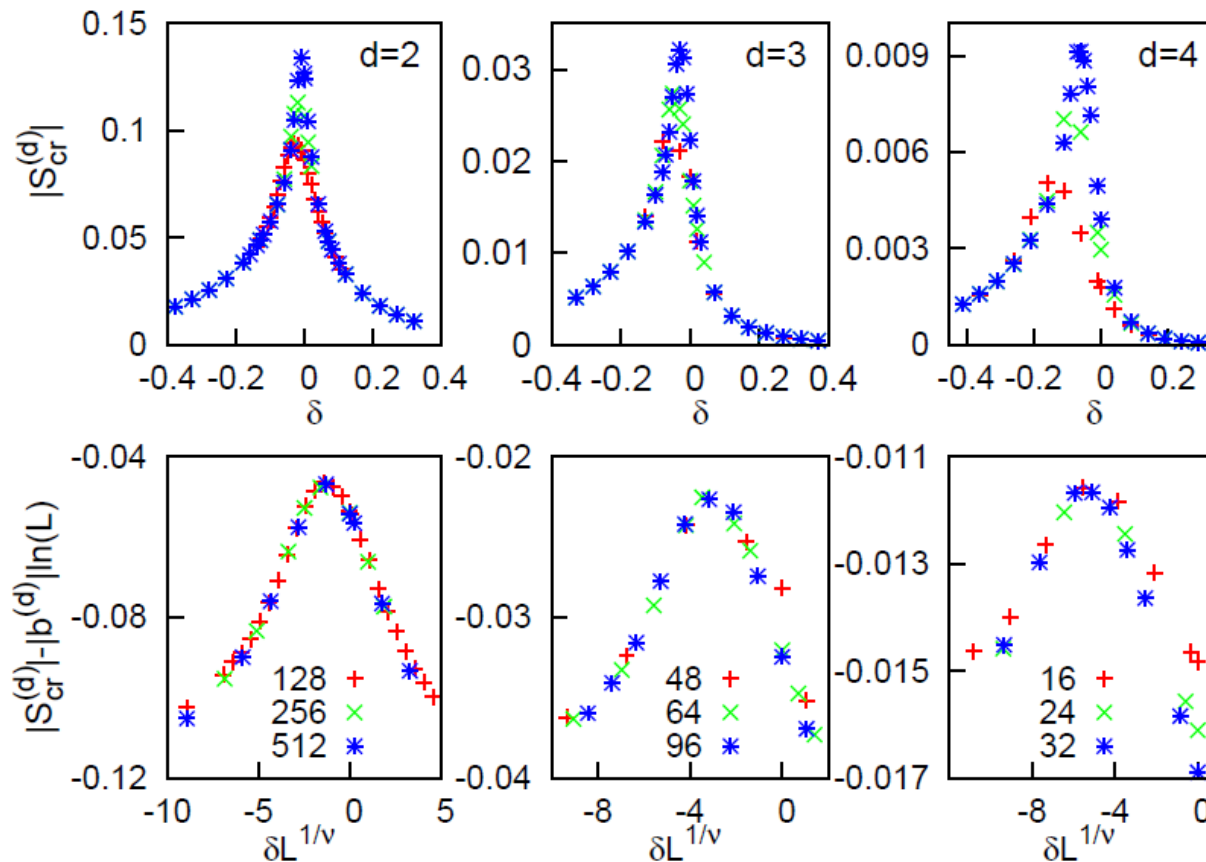
3D: a divergáló korrelációs hossz következménye

Páratlan dimenziókban megjelenik egy ugrás a háttérben!



Hiperuniverzális: 2^{1-d} a perkoláló klaszterből

Rendezetlen eset: minden véges dimenzióban hasonló viselkedést várunk (kocka részrendszer)



Szögfüggés további vizsgálatokra vár

Diszkusszió

- Kölcsönható rendszer összefonódási entrópia 2 és 3d-ben
- Érvényes a felületi törvény
- Univerzális sarok korrekció a divergáló korrelációs hossz következtében, ami a sarkokon keresztül jelenik meg
- Az előjele alternál a dimenziók számával
- Lehetnek más log korrekciók is, pl. topológiai eredetűek vagy Goldstone-módusokból származók
- Nagyobb spinnél is hasonló eredményeket várunk

Kérdések:

- Szögfüggés a rendezetlen esetben, ill. 3 dimenzióban?
- Dinamika? Frusztráció hatása?
- Mi történik, ha véges Fermi-felület van?

J. Esiert, M. Cramer, M.B. Plenio, Rev.Mod.Phys. (2010)

Köszönetnyilvánítás:

OTKA K75324, K77629, K109577

K. I. kutatása a TÁMOP 4.2.4.A/2-11-1-2012-0001 Nemzeti Kiválóság

Program című kiemelt projekt keretében zajlott. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg.

