GHZ állapot desztillálása feszes állapotokból

Hamarosan az arXiv-on!

Vrana Péter

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Geometria Tanszék

2015. szeptember 24. E-day

MŰEGYETEM 1782

Bevezetés
Összefonódási entrópia

Aszimptotikus LOCC transzformációk
LOCC transzformációk
Összefonódási entrópia
Shannon-típusú aszimptotika

Feszes állapotok és GHZ desztilláció
Aszimptotikus SLOCC transzformációk és algebrai bonyolultság
Feszes tenzorok, GHZ desztillálás: aszimptotikus SLOCC
LOCC változat

Összefonódási entrópia I

Definíció

$|\psi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ egységvektor, $\rho_A = \mathrm{Tr}_B\, |\psi\rangle\langle\psi|$

$$E(|\psi\rangle\langle\psi|) = -\,\mathrm{Tr}\,\rho_A \log \rho_A$$

Mit jelent???

Összefonódási entrópia II

Mit *nem* jelent?

$$|\psi\rangle = \sum_{i=0}^{7} \frac{1}{\sqrt{8}} |ii\rangle$$

$$|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{4}} |00\rangle + \frac{1}{\sqrt{8}} |11\rangle + \frac{1}{\sqrt{8}} |22\rangle + \frac{1}{\sqrt{8}} |33\rangle + \frac{1}{\sqrt{8}} |44\rangle + \frac{1}{\sqrt{16}} |55\rangle + \frac{1}{\sqrt{16}} |66\rangle + \frac{1}{\sqrt{16}} |77\rangle + \frac{1}{\sqrt{16}} |88\rangle$$

- $E(|\psi\rangle\langle\psi|) = E(|\varphi\rangle\langle\varphi|) = 3$, de egyikből sem lehet a másikat előállítani LOCC műveletekkel
- $|\varphi\rangle\langle\varphi|$ előállításához 4 EPR-pár kell...
- ...de belőle csak 2 darabot lehet kinyerni
- ha ρ_{AB} kevert, akkor $-\operatorname{Tr} \rho_A \log \rho_A \neq -\operatorname{Tr} \rho_B \log \rho_B$, és egyik sem jelent semmit

Összefonódási entrópia III

Mit jelent?

- $|\psi\rangle\langle\psi|$ több példányából szeretnénk LOCC műveletekkel $|\varphi\rangle\langle\varphi|$ több példányát közelítőleg előállítani
- ekkor n darab $|\varphi\rangle\langle\varphi|$ előállításához

$$\frac{E(|\varphi\rangle\langle\varphi|)}{E(|\psi\rangle\langle\psi|)} n + o(n)$$

  darab $|\psi\rangle\langle\psi|$ szükséges
- spec: „entanglement cost", „distillable entanglement"
- precíz definíció kevert állapotra és több részrendszerre is működik, de ekkor nem ilyen alakú a válasz

Többrészű rendszerek, LOCC transzformációk

Többrészű rendszer

- $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \ldots, \mathcal{H}_k$ Hilbert-terek
- $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_k$ összetett rendszer
- állapotok: $\mathcal{S}_{\leq}(\mathcal{H}) = \{\rho \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) | \rho \geq 0, \operatorname{Tr} \rho \leq 1\}$
- távolság[1]: $D_1(\rho, \sigma) = \frac{1}{2} \|\rho - \sigma\|_1 + \frac{1}{2} |\operatorname{Tr} \rho - \operatorname{Tr} \sigma|$

LOCC transzformációk

- $T_1, \ldots, T_k$ csatorna $\rightsquigarrow$ $T_1 \otimes \cdots \otimes T_k \in \mathrm{LOCC}$
- „klasszikus kommunikáció” $\in \mathrm{LOCC}$
- ezek tenzorszorzatai, kompozíciói
- $\rho \xrightarrow{\mathrm{LOCC}} \sigma$, ha $\exists \Lambda \in \mathrm{LOCC} : \Lambda(\rho) = \sigma$

[1] M. Tomamichel, R. Colbeck, and R. Renner, *Information Theory, IEEE Transactions on*, vol. 55, no. 12, pp. 5840–5847, 2009.

Nielsen-tétel

Kétrészű rendszerek tiszta állapotai

- Schmidt-dekompozíció: $P_X : \mathcal{X} \to [0,1]$ valószínűségi eloszlás

$$|\phi_P\rangle = \sum_{x \in \mathcal{X}} \sqrt{P_X(x)}\, |x\rangle_A \otimes |x\rangle_B$$

- minden tiszta állapot ilyennel ekvivalens

Tétel (Nielsen[2])

- *Ha P és Q valószínűségi eloszlások, akkor*

$$|\phi_P\rangle\langle\phi_P| \xrightarrow{\text{LOCC}} |\phi_Q\rangle\langle\phi_Q| \iff P \preceq Q$$

[2] M. A. Nielsen, *Physical Review Letters*, vol. 83, no. 2, p. 436, 1999.

Entrópiák I

Neumann-entrópia

- $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ entrópiája $H(\rho) = -\operatorname{Tr} \rho \log \rho$
- részrendszer entrópiája: $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_{ABC\ldots})$, $H(A)_\rho = H(\rho_A)$, stb.
- feltételes entrópia: $H(A|B)_\rho = H(AB)_\rho - H(B)_\rho$
- valószínűségi eloszlásokra hasonlóan (Shannon-entrópia)

Tulajdonságok

- „rendezetlenséget méri”
- $0 \leq H(\rho) \leq \log \dim \mathcal{H}$
- $P \preceq Q \implies H(Q) \leq H(P)$
- $H(\rho_A) = H(\rho_B)$ LOCC-monoton $\mathcal{H}_{AB}$ tiszta állapotain

Entrópiák II

$P_X : \mathcal{X} \to [0,1]$ valószínűségi eloszlás

Max-entrópia

- $\operatorname{supp} P_X = \{x \in \mathcal{X} | P_X(x) \neq 0\}$
- $H_{\max}(P_X) = \log |\operatorname{supp} P_X|$
- $H^{\epsilon}_{\max}(P_X) = \inf_{Q_X \in B^{\epsilon}(P_X)} H_{\max}(Q_X)$

Min-entrópia

- $H_{\min}(P_X) = -\log \max_{x \in \mathcal{X}} P_X(x)$
- $H^{\epsilon}_{\min}(P_X) = \sup_{Q_X \in B^{\epsilon}(P_X)} H_{\min}(Q_X)$

ahol $B^{\epsilon}(P) = \{Q | D_1(P,Q) \leq \epsilon\}$

Összefonódási entrópia IV

„One-shot" transzformációk

$$\mathrm{EPR}^{\otimes \lceil H^{\epsilon}_{\max}(P) \rceil} \xrightarrow{\text{LOCC}} \sigma \approx |\phi_P\rangle\langle\phi_P|$$

$$|\phi_P\rangle\langle\phi_P| \xrightarrow{\text{LOCC}} \sigma' \approx \mathrm{EPR}^{\otimes \lfloor H^{\epsilon}_{\min}(P) \rfloor}$$

Tétel (Aszimptotikus ekvipartíció[3])

Ha P_X valószínűségi eloszlás $\mathcal{X}$-en, ekkor

$$H^{\epsilon}_{max}(X^n)_{P_X^n} \leq nH(X)_{P_X} + \log(|\mathcal{X}| + 3)\sqrt{2\log\frac{1}{\epsilon}}\sqrt{n}$$

$$H^{\epsilon}_{min}(X^n)_{P_X^n} \geq nH(X)_{P_X} - \log(|\mathcal{X}| + 3)\sqrt{2\log\frac{1}{\epsilon}}\sqrt{n}$$

[3] T. Holenstein and R. Renner, *Information Theory, IEEE Transactions on*, vol. 57, no. 4, pp. 1865–1871, 2011.

Shannon-típusú aszimptotika

Aszimptotikus LOCC transzformációk

- ρ, σ állapotok k részrendszeren

$$D^{\epsilon}(\rho \to \sigma) = \sup\{m \in \mathbb{N} | \exists \sigma' \in B^{\epsilon}(\sigma^{\otimes m}) : \rho \xrightarrow{\text{LOCC}} \sigma'\}$$

- regularizáció: $D(\rho \to \sigma) = \lim_{\epsilon \to 0} \liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} D^{\epsilon}(\rho^{\otimes n} \to \sigma)$

Példa

$|\psi\rangle, |\varphi\rangle \in \mathcal{H}_{AB}$, ekkor[4]

$$D(|\psi\rangle\langle\psi| \to |\varphi\rangle\langle\varphi|) = \frac{E(|\psi\rangle\langle\psi|)}{E(|\varphi\rangle\langle\varphi|)}$$

[4] C. H. Bennett, H. J. Bernstein, S. Popescu, and B. Schumacher, *Physical Review A*, vol. 53, no. 4, p. 2046, 1996.

Aszimptotikus SLOCC transzformációk

SLOCC transzformációk[5]

- $\rho, \sigma \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_{ABC\dots})$
- $\rho \xrightarrow{\text{SLOCC}} \sigma$, ha $\exists p \in (0,1]$, amire $\rho \xrightarrow{\text{LOCC}} p\sigma$
- Ha $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ és $\sigma = |\varphi\rangle\langle\varphi|$, akkor ezzel ekvivalens: $|\varphi\rangle = (A \otimes B \otimes C \otimes \cdots)\,|\psi\rangle$, ahol $A, B, \dots$ lineáris operátorok

Aszimptotikus változat[6]

$$\frac{1}{\omega(\psi,\varphi)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sup\{m \in \mathbb{N} \,|\, |\psi\rangle\langle\psi|^{\otimes n} \xrightarrow{\text{SLOCC}} |\varphi\rangle\langle\varphi|^{\otimes m}\}$$

- egzakt transzformáció, de tetszőlegesen kis valószínűség $\rightsquigarrow D(|\psi\rangle\langle\psi| \to |\varphi\rangle\langle\varphi|)$ és $\omega(\psi,\varphi)$ között nincs kapcsolat!

---

[5] C. H. Bennett, S. Popescu, D. Rohrlich, J. A. Smolin, and A. V. Thapliyal, *Physical Review A*, vol. 63, no. 1, p. 012307, 2000.

[6] E. Chitambar, R. Duan, and Y. Shi, *PRL*, vol. 101, no. 14, p. 140502, 2008. P. Vrana and M. Christandl, *JMP*, vol. 56, no. 2, p. 022204, 2015.

Mátrixszorzás exponense

Mátrixszorzás bonyolultsága

- két $n \times n$ mátrix összeszorzásához hány alapműveletre van szükség? $\omega = \inf\{\tau | O(n^\tau) \text{ művelet elég}\}$
- szokásos módszer: $\omega \leq 3$
- jobb korlátok: 2.807 (Strassen), 2.796 (Pan), 2.78 (Bini et al.), 2.522 (Schönhage), 2.517 (Romani), 2.496 (Coppersmith-Winograd), 2.479 (Strassen), 2.376 (Coppersmith-Winograd[7]), 2.3737 (Stothers), 2.3727 (Williams)

Kapcsolat aszimptotikus SLOCC transzformációkkal

- 3 részrendszer: A,B,C
- $\omega = \omega(\mathrm{GHZ}, \mathrm{EPR}_{AB} \otimes \mathrm{EPR}_{BC} \otimes \mathrm{EPR}_{CA})$

[7] D. Coppersmith and S. Winograd, in *Proceedings of the nineteenth annual ACM symposium on Theory of computing*, pp. 1–6, ACM, 1987.

Feszes tenzorok

Definíció

$\Psi \subseteq I \times J \times K$ feszes, ha $\exists \alpha : I \to \mathbb{Z}, \beta : J \to \mathbb{Z}, \gamma : K \to \mathbb{Z}$ injektív leképezések, amire $(i,j,k) \in \Psi \implies \alpha(i) + \beta(j) + \gamma(k) = 0$.
$\psi \in \mathbb{C}^{n_1} \otimes \mathbb{C}^{n_2} \otimes \mathbb{C}^{n_3}$ feszes, ha $\exists$ szorzatbázis, amiben ψ tartója feszes, azaz

$$\psi = \sum_{i,j,k} \psi_{ijk} u_i \otimes v_j \otimes w_k$$

és $\operatorname{supp} \psi = \{(i,j,k) \in I \times J \times K | \psi_{ijk} \neq 0\}$ *feszes*

Példa

W állapot[8] (<u>W</u>olfgang Dür[9])

$$|W\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|100\rangle + |010\rangle + |001\rangle)$$

$\alpha(0) = 0,\ \alpha(1) = 1,\ \beta(0) = 0, \beta(1) = 1,\ \gamma(0) = -1,\ \gamma(1) = 0$

[8] W. Dür, G. Vidal, and J. I. Cirac, *PRA*, vol. 62, no. 6, p. 062314, 2000.
[9] A. Cabello, *Physical Review A*, vol. 65, p. 032108

GHZ desztillálás aszimptotikus SLOCC transzformációval I

Tétel (Strassen, 1991[10])

Legyen $\psi \in \mathbb{C}^{n_1} \otimes \mathbb{C}^{n_2} \otimes \mathbb{C}^{n_3}$, $\Psi = \operatorname{supp} \psi$ *feszes (alkalmas szorzatbázisban). Ekkor*

$$\frac{1}{\omega(\psi, \mathrm{GHZ})} = \max_{Q} \min\{H(A)_Q, H(B)_Q, H(C)_Q\}$$

ahol Q *valószínűségi eloszlás* Ψ*-n, az* A, B, C *valószínűségi változók együttes eloszlása*

Példa

$$|W\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|100\rangle + |010\rangle + |001\rangle)$$

max: Q egyenletes $\rightsquigarrow H(A)_Q = H(B)_Q = H(C)_Q = h(1/3)$

[10] V. Strassen, *J. Reine Angew. Math*, vol. 413, pp. 127–180, 1991.

GHZ desztillálás a-SLOCC II

Bizonyítás (alsó korlát)

- Q tetszőleges eloszlás Ψ-n, n nagy, $P \approx Q$, $nP(i,j,k) \in \mathbb{Z}$
- $|\psi\rangle^{\otimes n}$ állapotból indulunk, A, B, C vetít $T^n_{P_A}$, $T^n_{P_B}$, $T^n_{P_C}$ típusosztályra $\rightsquigarrow \varphi$, $\Phi = \operatorname{supp} \varphi = \Psi^n \cap (T^n_{P_A} \times T^n_{P_B} \times T^n_{P_C})$
- M prím, $1 \leq \min\{|T^n_{P_A}|, |T^n_{P_B}|, |T^n_{P_C}|\} M^{1-\delta} n^{-1} |\Phi|^{-1} \leq 2$
- $\omega_1, \ldots, \omega_{n+3}$ véletlen egyenletes $\mathbb{Z}_M$-en

$$a(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha(x_i)\omega_i + \omega_{n+1} - \omega_{n+2}$$

$$b(x) = \sum_{i=1}^{n} \beta(x_i)\omega_i + \omega_{n+2} - \omega_{n+3}$$

$$c(x) = -\frac{M+1}{2} \left(\sum_{i=1}^{n} \gamma(x_i)\omega_i + \omega_{n+3} - \omega_{n+1} \right)$$

GHZ desztillálás a-SLOCC III

Bizonyítás – folytatás

- legyen $S \subseteq \{0,\dots,(M-1)/2\}$, nincs benne három tagú számtani sorozat, $|S| \geq M^{1-\delta}$ (Salem-Spencer[11])
- A, B, C vetít $X = a^{-1}(S)$, $Y = b^{-1}(S)$, $Z = c^{-1}(S)$ véletlen halmazokra $\tilde{\Phi} = \Phi \cap (X \times Y \times Z)$, $\mathbb{E}(|\tilde{\Phi}|) \geq |S||\Phi|M^{-2}$
- $\Lambda = \{\{(x,y,z),(x',y',z')\} \in \binom{\Phi}{2} | x = x' \vee y = y' \vee z = z'\}$
- $|\Lambda| \leq 2|\Phi|(|\Phi| \min\{|T^n_{P_A}|, |T^n_{P_B}|, |T^n_{P_C}|\}^{-1} - 1)$
- $\tilde{\Lambda} = \Lambda \cap \binom{\tilde{\Phi}}{2}$, $\mathbb{E}(|\tilde{\Lambda}|) \leq 2|\Phi|^2 \min\{|T^n_{P_A}|, |T^n_{P_B}|, |T^n_{P_C}|\}^{-1} M^{-2}$
- $\mathbb{E}(|\tilde{\Phi} - \tilde{\Lambda}|) \geq \min\{|T^n_{P_A}|, |T^n_{P_B}|, |T^n_{P_C}|\}(2n)^{-4}|\Phi|^{2-2/(1-\delta)}$
- $\log(|\tilde{\Phi} - \tilde{\Lambda}|) \approx \min\{H(A)_Q, H(B)_Q, H(C)_Q\}$ darab GHZ előállítható egy újabb projekcióval

$\square$

[11] R. Salem and D. C. Spencer, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, vol. 28, no. 12, p. 561, 1942.

Strassen-protokoll – siker valószínűsége

Mikor nagy a valószínűség?

- $|\psi\rangle$ tartója legyen feszes egy ortonormált szorzatbázisban
- $Q(i,j,k) = |\psi_{ijk}|^2$
- ekkor a siker valószínűsége szubexponenciálisan tart 0-hoz
- nagyobb ráta mellett már exponenciálisan kicsi![12]

Hogyan lehetne még tovább növelni?

- típusosztályra vetítés helyett típusosztály mérése
- $Q(i,j,k) = |\psi_{ijk}|^2$ marginálisaihoz közel lesz a mért osztály
- véletlen részhalmazra vetítés helyett mérés véletlen partícióból kapott projektorokkal

[12] M. Hayashi, M. Koashi, K. Matsumoto, F. Morikoshi, A. Winter, J. Phys. A: Math. Gen. 36, 527 (2003)

GHZ desztillálás aszimptotikus LOCC transzformációval

Tétel (V & Christandl, 2015[13])

Legyen $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^I \otimes \mathbb{C}^J \otimes \mathbb{C}^K$ *egységvektor, standard bázisban* $\operatorname{supp}\psi$ *feszes,* $Q(i,j,k) = |\psi_{ijk}|^2$ *az* A, B, C *együttes eloszlása. Ekkor*

$$D(|\psi\rangle\langle\psi| \to \mathrm{GHZ}) \geq \min\Big\{H(A)_Q, H(B)_Q, H(C)_Q, \frac{1}{2}\left(H(A)_Q + H(B)_Q + H(C)_Q - H(ABC)_Q\right)\Big\}$$

Megjegyzés

$$D(|\psi\rangle\langle\psi| \to \mathrm{GHZ}) \leq \min\Big\{H(A)_Q, H(B)_Q, H(C)_Q\Big\}$$

[13] Hamarosan az arXiv-on!

Bizonyítás I

Lemma

Legyen P_{XY} eloszlás $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$-on, $0 < \epsilon < 1/2$, és

$$\mathrm{GHZ}_{P_{XY}} = \sum_{x,x',y} \sqrt{P_{XY}(xy)P_{XY}(x'y)}\, |xxx\rangle\langle x'x'x'| \otimes |yyy\rangle\langle yyy|$$

Ekkor $\exists \sigma \in B^{\sqrt{2\epsilon}}(\mathrm{GHZ}^{\otimes \lfloor H^{\epsilon}_{min}(X|Y)_{P_{XY}} \rfloor})$, hogy $\mathrm{GHZ}_{P_{XY}} \xrightarrow{\mathrm{LOCC}} \sigma$, ahol

$$H^{\epsilon}_{min}(X|Y)_{P_{XY}} = \max_{Q_{XY} \in B^{\epsilon}(P_{XY})} \min_{y \in \mathrm{supp}\, P_Y} \min_{x \in \mathcal{X}} \log \frac{P_Y(y)}{Q_{XY}(x,y)}$$

Következmény

AEP miatt $\mathrm{GHZ}_{P_{XY}}^{\otimes m}$ kb. $mH(X|Y)_P$ GHZ állapottá alakítható

Bizonyítás II

Definíció

Legyen $\mathcal{W} = (W, \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$*, ahol* W *kommutatív csoport,* $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ *a* W *partíciói.* $(A, B, C) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B} \times \mathcal{C}$ *esetén legyen*

$$S_{ABC} = \frac{1}{|W|^2}\Big|\{(a, b, c) \in A \times B \times C | a + b + c = 0\}\Big|$$

$$S^A{}_{BC} = \frac{1}{|W|^3}\Big|\{(a, b, b', c, c') \in A \times B^2 \times C^2 \; | a + b + c = a + b' + c' = 0\}\Big|$$

$$H_{\mathcal{W}} = -\sum_{ABC} S_{ABC} \log S_{ABC} \qquad P_{\mathcal{W},A} = \sum_{ABC} S^A{}_{BC}$$

$P_{\mathcal{W},B}$, $P_{\mathcal{W},C}$ *hasonlóan.*

Bizonyítás III

Lemma

Legyen $\Psi \subseteq I \times J \times K$ *feszes,* $\operatorname{supp}|\varphi\rangle = \Phi \subseteq \Psi^n$ S_n*-invariáns,* M *nagy prím. minden* $t = (P_A, P_B, P_C)$ *három n-típushoz legyen* $\mathcal{W}^{(t)}$ $\mathbb{Z}_M$*-vektortér+partíció-hármas,* $S_{ABC} \leq e^{-1}$*. Ekkor* $\exists P_{XY}$ *eloszlás,* $|\mathcal{X}| = \min\{|I|^n, |J|^n, |K|^n\}$*,* $|\varphi\rangle\langle\varphi| \xrightarrow{\text{LOCC}} \mathrm{GHZ}_{P_{XY}}$ *és*

$$H(X|Y)_P \geq \sum_{ijk}(-|\varphi_{ijk}|^2 \log|\varphi_{ijk}|^2)$$

$$-(|I|+|J|+|K|)\log(n+1) - \sum_t \left\| \varphi|_{T^n_{P_A}\times T^n_{P_B}\times T^n_{P_C}} \right\|^2 H_{\mathcal{W}^{(t)}}$$

$$-\sum_t \left(\frac{|\Phi|}{|T^n_{P_A}|} P_{\mathcal{W}^{(t)},A} + \frac{|\Phi|}{|T^n_{P_B}|} P_{\mathcal{W}^{(t)},B} + \frac{|\Phi|}{|T^n_{P_C}|} P_{\mathcal{W}^{(t)},C} \right) \cdot (n\log|I||J||K|)$$

Bizonyítás IV

Lemma

$$h_M(p_A, p_B, p_C) := \inf\{H_{\mathcal{W}} | P_{\mathcal{W},i} \leq p_i \ (i \in \{A, B, C\})\}$$
$$\leq \max\{-\log p_A, -\log p_B, -\log p_C, -\frac{1}{2}\log(p_A p_B p_C)\} + 6$$

ahol $\mathcal{W} = (W, \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$, W *vektortér* $\mathbb{Z}_M$ *felett,* $S_{ABC} \leq e^{-1}$

Következmény

Az előző lemmában elérhető:

$$H(X|Y)_P \approx nH(ABC)$$
$$-\max\left\{-\log\frac{|T^n_{P_A}|}{|\Phi|}, -\log\frac{|T^n_{P_B}|}{|\Phi|}, -\log\frac{|T^n_{P_C}|}{|\Phi|}, -\frac{1}{2}\log\frac{|T^n_{P_A}||T^n_{P_B}||T^n_{P_C}|}{|\Phi|^3}\right\}$$

AEP miatt $\log|\Phi| = H^{\epsilon}_{max}(Q^n) \approx nH(ABC)$ *lehet, ha* $|\phi\rangle \approx |\psi\rangle^{\otimes n}$

$\square$

További kérdések

- Igaz-e $D(|\psi\rangle\langle\psi| \to \mathrm{GHZ}) = \min\{H(A)_Q, H(B)_Q, H(C)_Q\}$?
- Lehet-e hasonlót mondani, ha $|\psi\rangle$ közelítőleg feszes?
- Több részrendszer? – mi a feszesség általánosítása?
- pl. Coppersmith-Winograd módszere és Strassen-féle felső korlát működik

$$|W_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{k}} \left(|100\ldots0\rangle + |010\ldots0\rangle + \cdots + |0\ldots01\rangle\right)$$

állapotra is:[14]

$$\frac{1}{\omega(W_k, \mathrm{GHZ}_k)} = h(1/k)$$

Ennek van LOCC megfelelője?

[14] P. Vrana and M. Christandl, *Journal of Mathematical Physics*, vol. 56, no. 2, p. 022204, 2015.