

Megdől-e a relativitáselmélet, ha vannak fénynél gyorsabb részecskék?

Székely Gergely

MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet ¹

2012.06.01. KFKI RMKI

¹Közös kutatás Andréka Hajnallal, Madarász Judittal, Molnár Attilával és Németi Istvánval.

Andréka–Németi iskola:



Andréka Hajnal



Németi István



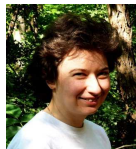
Madarász Judit



Molnár Attila



Németi Péter



Tordai Renáta

Célkitűzés

- Meg akarjuk vizsgálni, hogy mennyire mond ellent a relativitáselméletnek a félynél gyorsabb mozgás.

Célkitűzés

- Meg akarjuk vizsgálni, hogy mennyire mond ellent a relativitáselméletnek a félynél gyorsabb mozgás.
- Hogy világosan látszanak az elmélet határai, matematikai logikai keretek között fogunk dolgozni.

Terminológia

Terminológia

- **Axióma:** Kiinduló állítás/feltevés (amit nem bizonyítunk más állításokból). Nem alapigazság. Nem megdönthetetlen. Nem megkérdőjelezhetetlen.

Terminológia

- **Axióma:** Kiinduló állítás/feltevés (amit nem bizonyítunk más állításokból). Nem alapigazság. Nem megdönthetetlen. Nem megkérdőjelezhetetlen.
- **Elmélet:** Axiómák halmaza.

Terminológia

- **Axióma:** Kiinduló állítás/feltevés (amit nem bizonyítunk más állításokból). Nem alapigazság. Nem megdönthetetlen. Nem megkérdőjelezhetetlen.
- **Elmélet:** Axiómák halmaza.
- **Modell:** Olyan (matematikai) struktúra, amelyben el tudjuk dönteni, hogy az elmélet nyelvén megfogalmazott állítások igazak vagy hamisak.

Terminológia

- **Axióma:** Kiinduló állítás/feltevés (amit nem bizonyítunk más állításokból). Nem alapigazság. Nem megdönthetetlen. Nem megkérdőjelezhetetlen.
- **Elmélet:** Axiómák halmaza.
- **Modell:** Olyan (matematikai) struktúra, amelyben el tudjuk dönteni, hogy az elmélet nyelvén megfogalmazott állítások igazak vagy hamisak.
- **Axiómák modellje:** Olyan modell, amelyben igazak az axiómák.

A relativitáselmélet születése óta axiomatikus.

Einstein (1905) két informális posztulátum:

- **Relativitás elve:** „A fizikai törvények ugyanazok minden inerciális megfigyelő számára.”
- **Fény posztulátum:** „Van olyan megfigyelő, aki számára a fényjelek minden irányban ugyanakkora sebességgel terjednek.”

A relativitáselmélet születése óta axiomatikus.

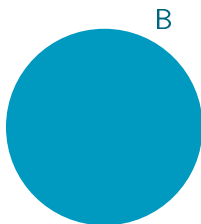
Einstein (1905) két informális posztulátum:

- **Relativitás elve:** „A fizikai törvények ugyanazok minden inerciális megfigyelő számára.”
- **Fény posztulátum:** „Van olyan megfigyelő, aki számára a fényjelek minden irányban ugyanakkora sebességgel terjednek.”

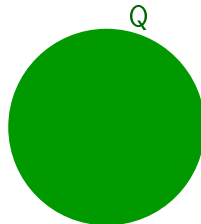
Logikai axiomatizáláshoz: kell egy nyelv (alapfogalmak halmaza), amelyen ezeket az állításokat felírjuk.

Logikai nyelv: { }

Logikai nyelv: $\{ B, Q, \}$



B



Q

$B \leftrightarrow$ Fizikai objektumok (próbatestek)

$Q \leftrightarrow$ Mennyiségek

Logikai nyelv: $\{ B, IOb, Ph, Q, \}$

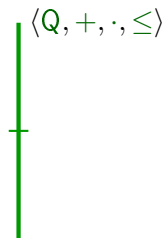
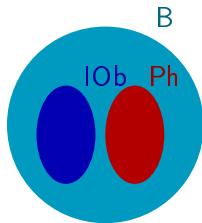


$B \iff$ Fizikai objektumok (próbatestek)

$IOb \iff$ Inerciális megfigyelők $Ph \iff$ Fényjelek

$Q \iff$ Mennyiségek

Logikai nyelv: $\{ B, IOb, Ph, Q, +, \cdot, \leq, \}$

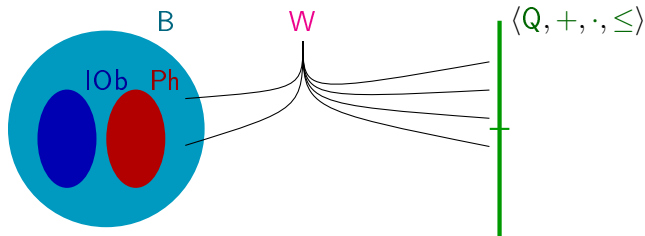


$B \iff$ Fizikai objektumok (próbatestek)

$IOb \iff$ Inerciális megfigyelők $Ph \iff$ Fényjelek

$Q \iff$ Mennyiségek $+, \cdot$ és $\leq \iff$ összeadás, szorzás és rendezés

Logikai nyelv: $\{ B, IOb, Ph, Q, +, \cdot, \leq, W \}$



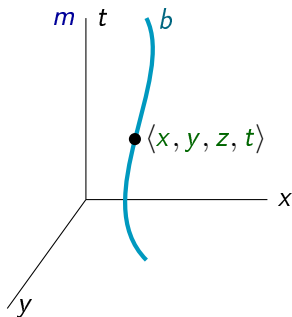
$B \iff$ Fizikai objektumok (próbatestek)

$IOb \iff$ Inerciális megfigyelők $Ph \iff$ Fényjelek

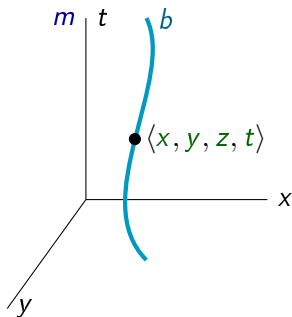
$Q \iff$ Mennyiségek $+, \cdot$ és $\leq \iff$ összeadás, szorzás és rendezés

$W \iff$ Világképreláció (6 argumentumú reláció)

$W(m, b, x, y, z, t) \iff$ „Az m megfigyelő a b próbatestet az $\langle x, y, z, t \rangle$ tériő pontban koordinátázza.”



$W(m, b, x, y, z, t) \iff$ „Az m megfigyelő a b próbatestet az $\langle x, y, z, t \rangle$ tériő pontban koordinátázza.”

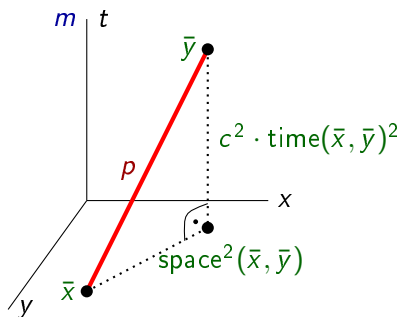


A b próbatest világvonala az m megfigyelő szerint.

$$wline_m(b) = \{ \langle x, y, z, t \rangle \in Q^4 : W(m, b, x, y, z, t) \}$$

AxLight :

Van olyan *inerciális megfigyelő*, *aki számára* a *fényjelek* minden irányban ugyanakkora sebességgel haladnak.



$$\exists mc \left[\text{IOb}(m) \wedge c > 0 \wedge \forall \bar{x} \bar{y} \left(\exists p \left[\text{Ph}(p) \wedge \text{W}(m, p, \bar{x}) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \wedge \text{W}(m, p, \bar{y}) \right] \leftrightarrow \text{space}^2(\bar{x}, \bar{y}) = c^2 \cdot \text{time}^2(\bar{x}, \bar{y}) \right) \right]$$

Legyen $\mathcal{F}$ az elmélet nyelvén megfogalmazható **potenciális fizikai törvények** halmaza.

$\text{SPR}_{\mathcal{F}}$:

*Minden $\varphi \in \mathcal{F}$ potenciális fizikai törvény, vagy minden **inerciális megfigyelőre** érvényes vagy egyikre sem.*

$$\{ \text{IOb}(m) \wedge \text{IOb}(k) \rightarrow [\varphi(m, \bar{x}) \leftrightarrow \varphi(k, \bar{x})] : \varphi \in \mathcal{F} \}.$$

Legyen $\mathcal{F}$ az elmélet nyelvén megfogalmazható **potenciális fizikai törvények** halmaza.

$\text{SPR}_{\mathcal{F}}$:

*Minden $\varphi \in \mathcal{F}$ potenciális fizikai törvény, vagy minden **inerciális megfigyelőre** érvényes vagy egyikre sem.*

$$\{ \text{IOb}(m) \wedge \text{IOb}(k) \rightarrow [\varphi(m, \bar{x}) \leftrightarrow \varphi(k, \bar{x})] : \varphi \in \mathcal{F} \}.$$

Potenciális fizikai törvények $(\mathcal{F}) = ???$

Potenciális fizikai törvények ($\mathcal{F}$) = ???

Potenciális fizikai törvények ($\mathcal{F}$) = ???

- $\mathcal{F} \subseteq$ „az elmélet nyelvén felírható formulák”.

Potenciális fizikai törvények $(\mathcal{F}) = ???$

- $\mathcal{F} \subseteq$ „az elmélet nyelvén felírható formulák”.
- Kell egy **megfigyelő** szabad paraméter/vátozó az $\mathcal{F}$ -beli formulákba.

Potenciális fizikai törvények $(\mathcal{F}) = ???$

- $\mathcal{F} \subseteq$ „az elmélet nyelvén felírható formulák”.
- Kell egy **megfigyelő** szabad paraméter/vátozó az $\mathcal{F}$ -beli formulákba.
- Több, **fizikai objektum** típusú szabad paramétert nem akarunk bevenni.

Potenciális fizikai törvények $(\mathcal{F}) = ???$

- $\mathcal{F} \subseteq$ „az elmélet nyelvén felírható formulák”.
- Kell egy **megfigyelő** szabad paraméter/vátozó az $\mathcal{F}$ -beli formulákba.
- Több, **fizikai objektum** típusú szabad paramétert nem akarunk bevenni.
- A **számokat** paraméterként akarjuk használni.

Potenciális fizikai törvények ($\mathcal{F}$) = ???

- $\mathcal{F} \subseteq$ „az elmélet nyelvén felírható formulák”.
- Kell egy **megfigyelő** szabad paraméter/vátozó az $\mathcal{F}$ -beli formulákba.
- Több, **fizikai objektum** típusú szabad paramétert nem akarunk bevenni.
- A **számokat** paraméterként akarjuk használni.

SPR⁺: amikor $\mathcal{F}$, az 1 **fizikai objektum** és tetszőleges sok **szám** típusú szabad paramétert tartalmazó formulák halmaza.

AxPh :

A *fénysebesség* minden *inerciális megfigyelő* számára ugyanakkora.

AxPh :

A *fénysebesség* minden *inerciális megfigyelő* számára ugyanakkora.

Áll.:

$$\text{SPR}^+ + \text{AxLight} \Rightarrow \text{AxPh}$$

AxPh :

A *fénysebesség* minden *inerciális megfigyelő* számára ugyanakkora.

Áll.:

$$\text{SPR}^+ + \text{AxLight} \Rightarrow \text{AxPh}$$

$$\text{SPR}_{\mathcal{F}} + \text{AxLight} \Rightarrow \text{AxPh}, \text{ ha}$$

$$\exists p [\text{Ph}(p) \wedge W(m, p, \bar{x}) \wedge W(m, p, \bar{y})] \in \mathcal{F}.$$

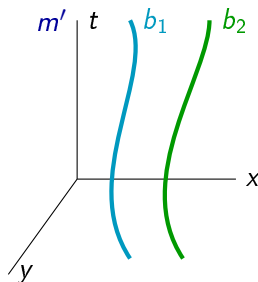
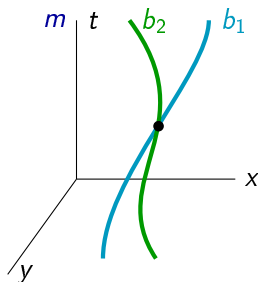
AxOField :

A **mennyiségek struktúrája** $\langle \mathbb{Q}; +, \cdot, \leq \rangle$ egy rendezett test.

- Racionális számok: $\mathbb{Q}$,
- $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$, $\mathbb{Q}(\pi)$, ...
- Kiszámítható számok,
- Szerkeszthető számok,
- Algebrai valós számok: $\overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}$,
- Valós számok: $\mathbb{R}$,
- Hiperracionális számok: $\mathbb{Q}^*$,
- Hipervalós számok: $\mathbb{R}^*$,
- stb.

AxEv :

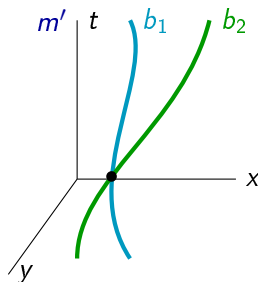
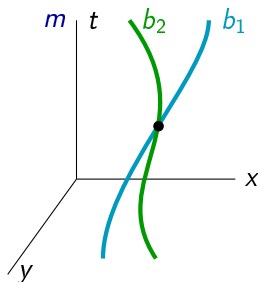
Az *inerciális megfigyelők* ugyanazokat az *eseményeket* (*próbatestek találkozásait*) *koordinátázzák*.



$$\forall m m' \bar{x} \text{ IOb}(m) \wedge \text{IOb}(m') \rightarrow [\exists \bar{x}' \forall b \text{ W}(m, b, \bar{x}) \leftrightarrow \text{W}(m', b, \bar{x}')].$$

AxEv :

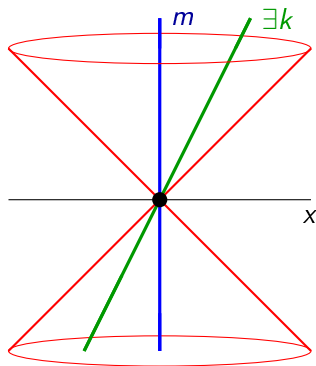
Az *inerciális megfigyelők* ugyanazokat az *eseményeket* (*próbatestek találkozásait*) *koordinátázzák*.



$$\forall m m' \bar{x} \text{ IOb}(m) \wedge \text{IOb}(m') \rightarrow [\exists \bar{x}' \forall b \text{ W}(m, b, \bar{x}) \leftrightarrow \text{W}(m', b, \bar{x}')].$$

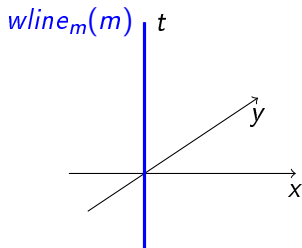
AxThExp :

Tetszőleges fénynél lassabb sebességgel, tetszőleges irányban mozoghat egy *inerciális megfigyelő*.



AxSelf :

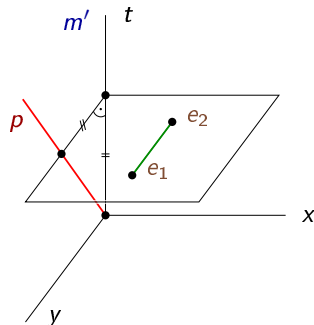
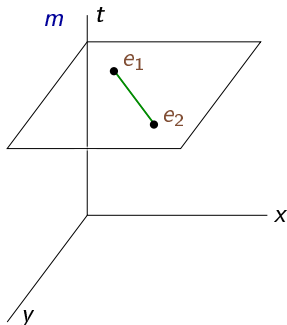
Az *inerciális megfigyelők* a saját vonatkoztatási rendszerükben nem mozognak.



$$\forall mxyz t \left(\text{IOb}(m) \rightarrow [\text{W}(m, m, x, y, z, t) \leftrightarrow x = y = z = 0] \right).$$

AxSym :

Az *inerciális megfigyelők* egyetértenek a kölcsönösen egyidejűnek tartott események *távolságán*. Továbbá a *fénysebesség 1*.



$$SR = \text{AxOField} + \mathbf{SPR^+} + \mathbf{AxLight} + \text{AxEv} + \text{AxThExp} + \text{AxSelf} + \text{AxSym}$$

$$\begin{aligned} \text{SR} &= \text{AxOField} + \mathbf{SPR}^+ + \mathbf{AxLight} + \text{AxEv} + \text{AxThExp} + \text{AxSelf} + \text{AxSym} \\ \text{SpecRel} &= \text{AxOField} + \mathbf{AxPh} + \text{AxEv} + \text{AxSelf} + \text{AxSym} \end{aligned}$$

$$\text{SR} = \text{AxOField} + \mathbf{SPR}^+ + \mathbf{AxLight} + \text{AxEv} + \text{AxThExp} + \text{AxSelf} + \text{AxSym}$$

$$\text{SpecRel} = \text{AxOField} + \mathbf{AxPh} + \text{AxEv} + \text{AxSelf} + \text{AxSym}$$

Áll.:

$$\text{SR} \Rightarrow \text{Einstein SR} \Rightarrow \text{SpecRel}, \text{ de}$$

$$\text{SR} = \text{AxOField} + \mathbf{SPR}^+ + \mathbf{AxLight} + \text{AxEv} + \text{AxThExp} + \text{AxSelf} + \text{AxSym}$$

$$\text{SpecRel} = \text{AxOField} + \mathbf{AxPh} + \text{AxEv} + \text{AxSelf} + \text{AxSym}$$

Áll.:

$$\begin{array}{ccc} \text{SR} & \Rightarrow & \text{Einstein SR} \Rightarrow \text{SpecRel}, \text{ de} \\ \text{SR} & \not\Leftarrow & \text{SpecRel}. \end{array}$$

$$\text{SR} = \text{AxOField} + \mathbf{SPR}^+ + \mathbf{AxLight} + \text{AxEv} + \text{AxThExp} + \text{AxSelf} + \text{AxSym}$$

$$\text{SpecRel} = \text{AxOField} + \mathbf{AxPh} + \text{AxEv} + \text{AxSelf} + \text{AxSym}$$

Áll.:

$$\begin{array}{ccc} \text{SR} & \Rightarrow & \text{Einstein SR} \Rightarrow \text{SpecRel}, \text{ de} \\ \text{SR} & \not\Leftarrow & \text{SpecRel}. \end{array}$$

Tétel:

$\text{SpecRel} \Rightarrow$ „az *inerciális megfigyelők* világképei közötti áttérési transzformációk Poincaré transzformációk.”

$$\text{SR} = \text{AxOField} + \mathbf{SPR}^+ + \mathbf{AxLight} + \text{AxEv} + \text{AxThExp} + \text{AxSelf} + \text{AxSym}$$

$$\text{SpecRel} = \text{AxOField} + \mathbf{AxPh} + \text{AxEv} + \text{AxSelf} + \text{AxSym}$$

Áll.:

$$\begin{array}{ccc} \text{SR} & \Rightarrow & \text{Einstein SR} \Rightarrow \text{SpecRel, de} \\ \text{SR} & \not\Leftarrow & \text{SpecRel.} \end{array}$$

Tétel:

$\text{SpecRel} \Rightarrow$ „az *inerciális megfigyelők* világképei közötti áttérési transzformációk Poincaré transzformációk.”

Tétel:

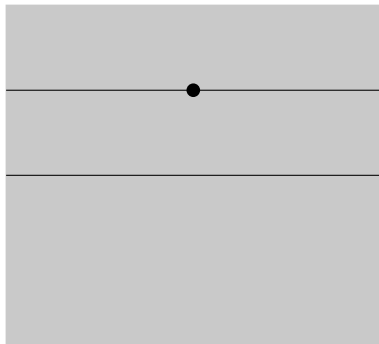
$\text{SpecRel} \Rightarrow$ „az *inerciális megfigyelők* csak fénynél lassabban mozoghatnak egymáshoz képest.”

Egy állítás **független**, ha sem ő, sem a tagadása nem következik az axiómákból.

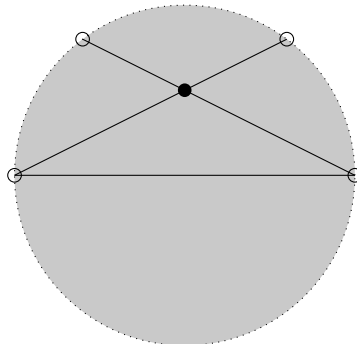
Egy állítás **független**, ha sem ő, sem a tagadása nem következik az axiómákból. Azaz, van az axiómáknak olyan modellje, amelyben igaz az állítás és van olyan modell is, amelyben hamis.

Egy állítás **független**, ha sem ő, sem a tagadása nem következik az axiómákból. Azaz, van az axiómáknak olyan modellje, amelyben igaz az állítás és van olyan modell is, amelyben hamis.

Példa (párhuzamossági axióma):



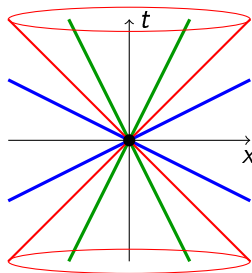
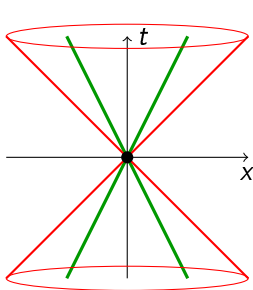
Euklideszi geometria



Hiperbolikus geometria

Tétel: (Függelenség)

- Van olyan SR modell, amelyben nincsenek fénynél gyorsabb próbatestek.
- Van olyan SR modell, amelyben vannak fénynél gyorsabb próbatestek.

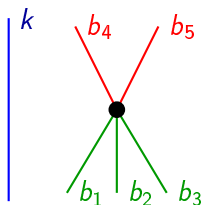


Relativisztikus részecskedinamika

Új alapfogalom: **Relativisztikus tömeg**

$m_k(b)$ = „a b próbatest relativisztikus tömege a k inerciális megfigyelő szerint”.

Lehetséges ütközések

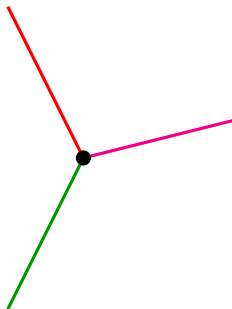


Tömegmegmaradás + impulzusmegmaradás:

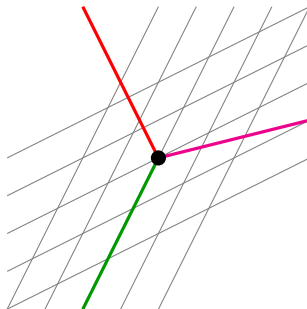
$$\sum_{\text{bemenő}} m_k(b_i) = \sum_{\text{kijövő}} m_k(b_i)$$

$$\sum_{\text{bemenő}} m_k(b_i) v_k(b_i) = \sum_{\text{kijövő}} m_k(b_i) v_k(b_i)$$

Bemenő vagy kijövő?



Bemenő vagy kijövő?



Dinamikai axiómák:

AxColl :

A lehetséges ütközés fogalma megfigyelő független.

AxSpeed :

$$v_k(b) = v_h(b) \rightarrow m_k(b) = m_h(b).$$

AxMass :

$$m_k(b) = m_k(b') \wedge v_k(b) = v_k(b') \rightarrow m_h(b) = m_h(b').$$

Ax $\forall$ Inecoll :

A próbatesteket össze lehet ütköztetni.

Ax $\exists$ Mass :

Minden inerciális megfigyelő tetszőleges (pozitív) tömeget láthat állni.

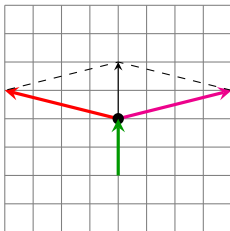
$$\text{SRDyn} = \text{SR} + \text{AxColl} + \text{AxSpeed} + \text{AxMass} + \text{Ax}\forall\text{inecoll} + \text{Ax}\exists\text{Mass}$$

Tétel: (Függelenség)

- Van olyan **SRDyn** modell, amelyben nincsenek fénynél gyorsabb pozitív tömegű próbatestek.
- Van olyan **SRDyn** modell, amelyben vannak fénynél gyorsabb pozitív tömegű próbatestek.

Tétel: (Függetlenség)

- Van olyan **SRDyn** modell, amelyben nincsenek fénynél gyorsabb pozitív tömegű próbatestek.
- Van olyan **SRDyn** modell, amelyben vannak fénynél gyorsabb pozitív tömegű próbatestek.

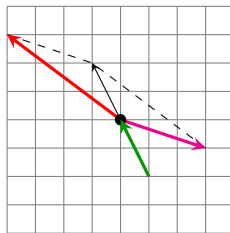
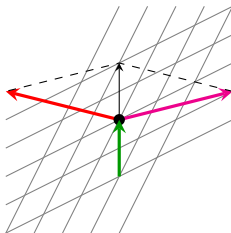


$$\mathbf{P}_k(b_1) = \mathbf{P}_k(b_2) + \mathbf{P}_k(b_3)$$

$$\mathbf{P}_k(b) = \langle m_k(b), m_k(b)v_k(b) \rangle$$

Tétel: (Függetlenség)

- Van olyan **SRDyn** modell, amelyben nincsenek fénynél gyorsabb pozitív tömegű próbatetek.
- Van olyan **SRDyn** modell, amelyben vannak fénynél gyorsabb pozitív tömegű próbatetek.

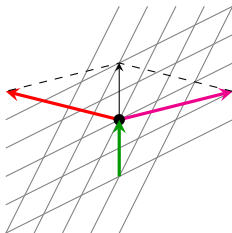


$$\mathbf{P}_k(b_1) = \mathbf{P}_k(b_2) + \mathbf{P}_k(b_3) \iff \tilde{\mathbf{P}}_k(b_1) = \tilde{\mathbf{P}}_k(b_2) + \tilde{\mathbf{P}}_k(b_3)$$

$$\mathbf{P}_k(b) = \langle m_k(b), m_k(b)v_k(b) \rangle$$

Tétel: (Függetlenség)

- Van olyan **SRDyn** modell, amelyben nincsenek fénynél gyorsabb pozitív tömegű próbatestek.
- Van olyan **SRDyn** modell, amelyben vannak fénynél gyorsabb pozitív tömegű próbatestek.

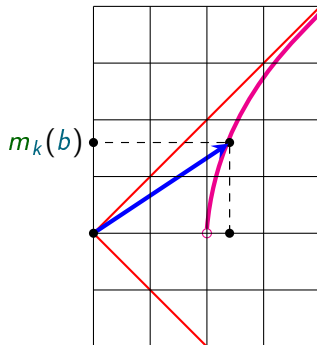


$$\mathbf{P}_k(b_1) = \mathbf{P}_k(b_2) + \mathbf{P}_k(b_3) \iff \tilde{\mathbf{P}}_k(b_1) + (-\tilde{\mathbf{P}}_k(b_3)) = \tilde{\mathbf{P}}_k(b_2)$$

$$\mathbf{P}_k(b) = \langle m_k(b), m_k(b)v_k(b) \rangle$$

Tétel: (SpecRelDyn)

$$|m_k(b)| \cdot \sqrt{|1 - v_k^2(b)|} = |m_h(b)| \cdot \sqrt{|1 - v_h^2(b)|}.$$



Happy End?

Happy ~~End?~~ Beginning

Happy ~~End~~ Beginning

Háttéranyagok:

www.renyi.hu/~nemeti/nrecentwork.htm

www.renyi.hu/~turms

Köszönöm a figyelmet!