Reciprocitás - kvantumos és hullámjelenségek egy szimmetriája

Fülöp Tamás + Deák László

MTA Wigner FK RMI

MTA Wigner FK RMI, Budapest, 2012.06.22

Mi a reciprocitás?

‘A fénysugár útja megfordítható’

G. Stokes, Cambridge Dublin Math. J. 4 (1849) 89.

H. von Helmholtz, Handbuch der Physiologischen Optik (1866);
J.W. Strutt, Baron Rayleigh, The theory of sound (1877),
Vol. 1, pp. 50-157:

„Ha egy véges kiterjedésű rögzített testeket is tartalmazó légtér egy tetszőleges A pontjában hanghullámokat keltünk, akkor a légtér egy B pontjában kialakuló hanghullám amplitúdójában és fázisában is megegyezik azzal a hullámmal, amit a B pontban keltve az A pontban észlelnénk.”

Reciprocitás: forrás és detektor felcserélésekor invariancia

Ha polarizáció is van: már nem egyértelmű a ‘felcserélés’:
a polarizációkról hogyan intézkedjünk? $\Longrightarrow$ vita

Landau az időtükrözésre (K_T) vett invariancia következményét „reciprocitási tétel”-nek nevezte el $\Longrightarrow$ zűrzavar

[foglalt szó; létezik némi átfedés]

A reciprocitás abszorpció esetén is teljesülhet!

Egyesek: 180°-os forgatásra (R_π) vett invariancia
Mások: PK_T-re vett invariancia
Emlegetve még: ‘mikroreverzibilitás’; ‘részletes egyensúly elve’
reciprok = fordított — sokféle értelemben felhasználható szó

reciprocitás: tulajdonság? tétel? szimmetria?

irodalom(t): $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\text{jel}}{\text{zaj}} < 0$

Az adódó tennivalók:

– megérteni: ki mit ért alatta, hogyan tárgyalja
– dönteni: mi mit értsünk alatta
– megcsinálni: hogyan tárgyaljuk

A K_T az K_T , a PK_T az PK_T , az R_π az R_π .
Az érdekes itt az eredeti értelem: a hullám $\leftrightarrow$ detektor csere:
ezt célozzuk meg

Előkészületek:

komplex hullámfüggvény (egy- vagy többkomponensű)

skalárszorzat, Hilbert-tér

hullámterjedés egyenlete Schrödingeri alakú: $i\partial_t \psi = H\psi\,,$

ahol $H = H_0 + V$

H_0: szabad hullámterjedés

V lehet komplex is (elnyelés)

Szóráselmélet:

$$G_E^{\pm} := (E - H \pm i\epsilon)^{-1}$$

$$\chi^{\pm} := u + G_E^{\pm} V u, \qquad \chi^{T\pm} := u + G_E^{\mp\,\dagger} V^{\dagger} u,$$

ahol u H_0 sajátállapota valós E sajátértékkel

(szabad be- ill. kifutó rész)

Az $u_\alpha \to u_\beta$ rugalmas szórás amplitúdója $(E_\alpha = E_\beta)$:

$$\langle \beta \,|T|\, \alpha \rangle := \left(u_\beta, V\chi_\alpha^{+}\right) = \left(\chi_\beta^{T-}, V u_\alpha\right)$$

[tehát az adjungált probléma $(H^\dagger)$ egy szórásfolyamatával is felírható]

Antiunitér operátorok: (avagy: konjugált unitér)

izometrikusak: $\|K\psi\| = \|\psi\|$

és konjugált lineárisak: $K(\lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2) = \lambda_1^* K\psi_1 + \lambda_2^* K\psi_2$

Következmény: $(K\psi_1, K\psi_2) = (\psi_2, \psi_1)$

Példa matematikai oldalról: komplex konjugálás: $J\psi = \psi^*$

Példák fizikai oldalról: K_T időtükrözés, K_C töltéskonjugálás

Ugyanannyian vannak, mint az unitérek: $(\forall K)$ $K = UK_0$

"A good definition should be the hypothesis of a theorem."

(J. Glimm)

Egy rendszer *reciprocitási tulajdonságú* egy K-ra nézve, ha

$$KH_0K^{-1} = H_0 \quad \text{és} \quad KVK^{-1} = V^\dagger$$

$\Longrightarrow$ Reciprocitás-tétel a Green-operátorokra:

$$KG_E^{\pm}K^{-1} = G_E^{\pm\,\dagger}$$

Egy $u_\alpha \to u_\beta$ szórásfolyamat *reciprok partnere*: $u_{\overline{\beta}} \to u_{\overline{\alpha}}$, ahol $u_{\overline{\alpha}} := Ku_\alpha, \;\; u_{\overline{\beta}} := Ku_\beta$

$\Longrightarrow$ Reciprocitás-tétel a szórási amplitúdóra:

$$\langle \beta \,|T|\, \alpha \rangle = \langle \overline{\alpha} \,|T|\, \overline{\beta} \rangle$$

Tömören: a reciprocitás a szórási amplitúdó egy szimmetriája.

Bizonyítás:

$$
\begin{aligned}
\langle \beta\,|T|\,\alpha\rangle &= \left(u_\beta, V\chi_\alpha^+\right) \\
&= \left(KV\chi_\alpha^+, Ku_\beta\right) = \left(V^\dagger K\chi_\alpha^+, Ku_\beta\right) \\
&= \left(K\chi_\alpha^+, VKu_\beta\right) = \left(\chi_{\overline{\alpha}}^{T-}, Vu_{\overline{\beta}}\right) \\
&= \left\langle \overline{\alpha}\,|T|\,\overline{\beta}\right\rangle
\end{aligned}
$$

A felhasznált főbb hozzávalók:

- $(K\psi_1, K\psi_2) = (\psi_2, \psi_1)$,
- $KG_E^{\pm}K^{-1} = G_E^{\pm\,\dagger}$,
- $\langle \beta\,|T|\,\alpha\rangle = \left(u_\beta, V\chi_\alpha^+\right) = \left(\chi_\beta^{T-}, Vu_\alpha\right)$

Diszkusszió:

A szóróobjektumra és a folyamatra is feltétel van
(nem csak a szóró közegen múlik)

Nem forgatás: *anti*unitér

Időtükrözés: K_T egy lehetséges K a sok közül;
akkor is adhat reciprocitási tételt, ha nincs K_T-invariancia

Kétkomponensű hullámfüggvény esetén:

$$\psi(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \psi_1(\mathbf{r}) \\ \psi_2(\mathbf{r}) \end{pmatrix}, \qquad V(\mathbf{r})\ 2\times 2\text{-es}$$

$$H_0 := -\Delta\ , \qquad u_\alpha(\mathbf{r}) = p_\alpha e^{i\mathbf{k}_\alpha \mathbf{r}}$$

$K := UJ$, ahol U 2×2-es

$$u_{\overline{\alpha}}(\mathbf{r}) = (Ku_\alpha)(\mathbf{r}) = (Up_\alpha^*)\, e^{-i\mathbf{k}_\alpha \mathbf{r}}\ : \qquad \mathbf{k}_{\overline{\alpha}} = -\mathbf{k}_\alpha, \qquad p_{\overline{\alpha}} = Up_\alpha^*$$

$\mathbf{k}_\alpha, p_\alpha \to \mathbf{k}_\beta, p_\beta$ reciprok partnere $-\mathbf{k}_\beta, Up_\beta^* \to -\mathbf{k}_\alpha, Up_\alpha^*$

$KVK^{-1} = V^\dagger$: $\quad V = UV^\mathsf{T}U^{-1} \qquad (U = \sigma_0 :\ V = V^\mathsf{T})$

Matematikus eredmények:

$d \leq 7$ dimenziós komplex mátrixokra:

$$(\exists U) \;\; V = UV^{\mathsf{T}}U^{-1} \iff (\exists \tilde{U}) \;\; \left(\tilde{U}V\tilde{U}^{-1}\right)^{\mathsf{T}} = \tilde{U}V\tilde{U}^{-1};$$

és bármely véges d-re:

teljes osztályozása a $V = UV^{\mathsf{T}}U^{-1}$ -jú V-knek

[S.R. Garcia, J.E. Tener, J. Operator Theory (in press); arXiv:0908.2107v4]

Végtelen d: nyitott kérdés

[~~∞ pol.~~; U nemcsak polarizációban]

Szakaszonként helyfüggetlen V-kre:

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

mátrixok szerint kifejtve:

$$V = v_0\sigma_0 + v_1\sigma_1 + v_2\sigma_2 + v_3\sigma_3 = v_0\sigma_0 + \mathbf{v}\boldsymbol{\sigma}$$

(neutron: $\mathbf{v} = c\mathbf{B}$, foton Mössbauer: $\mathbf{B}$ függvénye)

Ekkor $\quad V^{\mathsf{T}} = v_0\sigma_0 + v_1\sigma_1 - v_2\sigma_2 + v_3\sigma_3,$

U pedig egy forgatás $\mathbf{v}$-re: forgassa vissza a tükrözöttet

1 ilyen réteg: mindig van ilyen U

Ha n réteg, V_1, V_2, $\ldots V_n$: kritérium:

$\mathrm{Re}\,\mathbf{v}_1,\ \mathrm{Im}\,\mathbf{v}_1,\ \mathrm{Re}\,\mathbf{v}_2,\ \mathrm{Im}\,\mathbf{v}_2,\ \ldots\ \mathrm{Re}\,\mathbf{v}_n,\ \mathrm{Im}\,\mathbf{v}_n$ egy síkban

Reciprocitás kombinálása forgatással:

$$\langle \mathbf{k}_\beta, p_\beta | T | \mathbf{k}_\alpha, p_\alpha \rangle = \langle \mathbf{k}_\beta, U_R U p_\alpha^* | T_R | \mathbf{k}_\alpha, U_R U p_\beta^* \rangle$$

(mert egy szinkrotron forrást—egy gyorsítótót—nem egyszerű odébbrakni)

Reciprocitássértés: képlet a szórási amplitúdók különbségére

Abszolútérték-reciprocitás:

Ha a szórási amplitúdók abszolút értéke egyezik
(a mérések zöme csak ezt látja)

$U = \sigma_0$ esetén: $\qquad V_{12} = e^{i\delta} V_{21}, \quad$ ahol δ helyfüggetlen

Mi látszik kísérletekben:

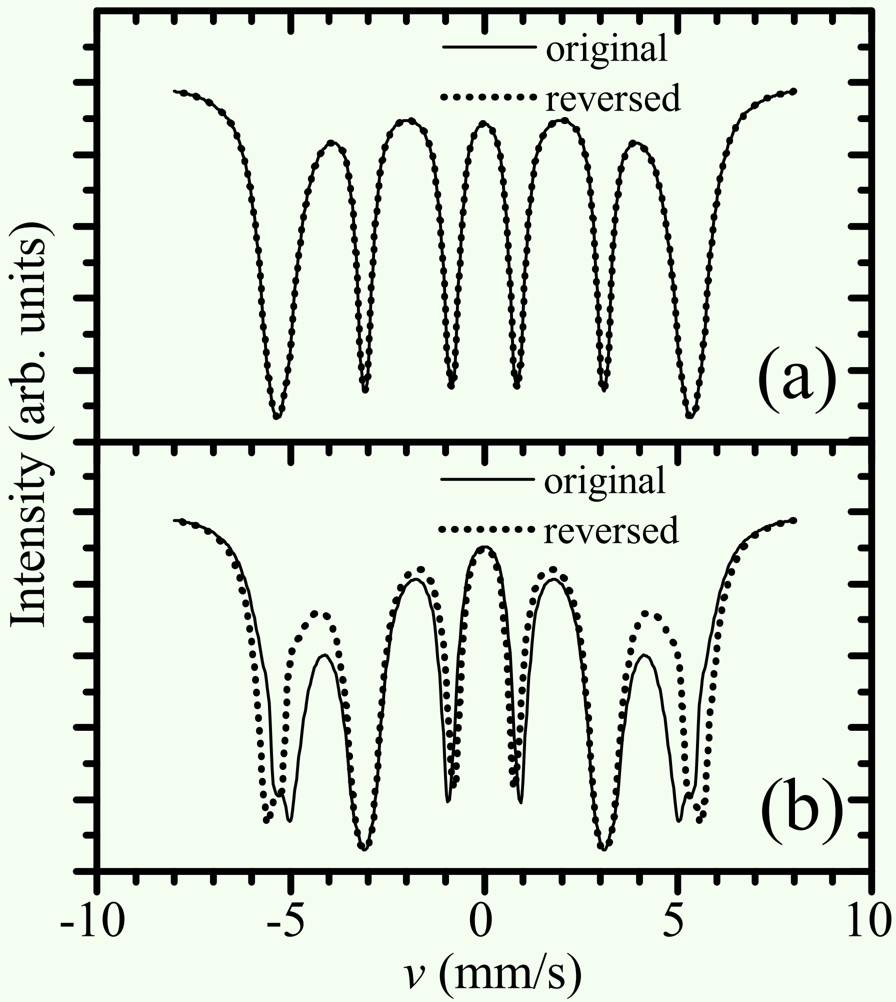
Pl. Mössbauer-szórás ^{57}Fe vékonyrétegeken:

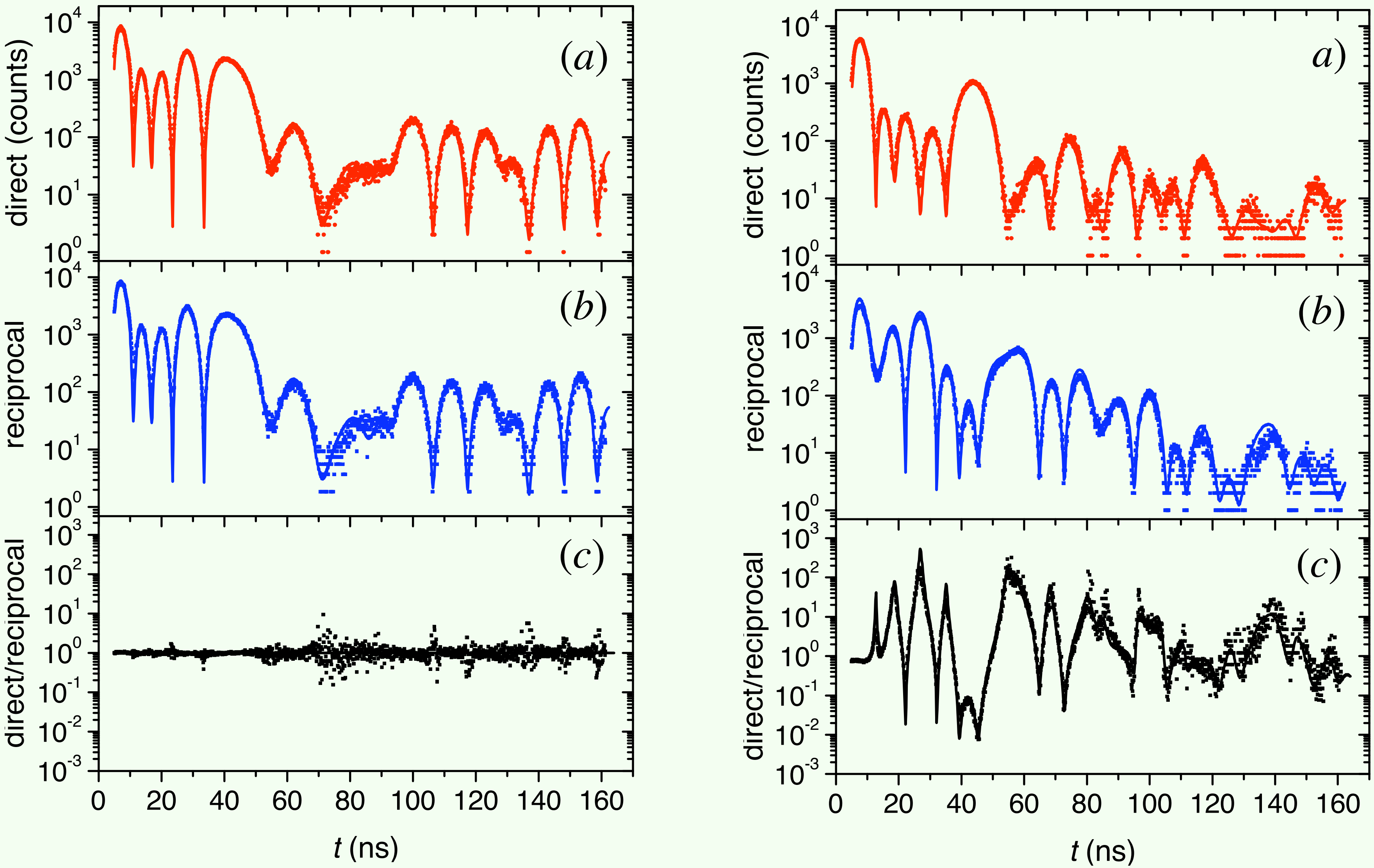
szakaszonként homogén $\mathbf{B}$, szakaszonként homogén V,

van abszorpció $\Longrightarrow$ nincs K_T-invariancia,

rétegrend megválasztása $\Longrightarrow$ nincs R_π-invariancia

Polarizációs viszonyok, vagy a rétegek elhangolásával elronthatjuk-visszaállíthatjuk a reciprocitást


original
reversed
(a)
original
reversed
(b)
Intensity (arb. units)
-10
-5
0
5
10
v (mm/s)



(a)
(b)
(c)
a)
(b)
(c)
direct (counts)
reciprocal
direct/reciprocal
t (ns)
0
20
40
60
80
100
120
140
160

Alkalmazások:

elektromos áramkörök

antennák

röntgendiagnosztika

mikroelektronikai eszközök

akusztika

szeizmológia

Keresünk is továbbiakat