Klasszikus és kvantum fizika

valamint a Wigner függvény

T.S. Biró

MTA Wigner Fizikai Kutatóközpont, Budapest

2017. november 13.

T.S.Biró Wigner 115, Budapest, 2017. Nov. 15.

Abstract

A review of Schrödinger's (Einstein's), Heisenberg's (Bohr's) and Wigner's approach to quantum physics is touched upon.

The classical – quantum correspondance is not, as usual, restricted to the $\hbar \to 0$ limit, but rather the classical roots of quantum concepts are emphasized.

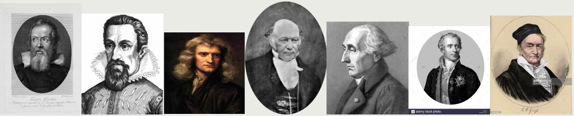
An energy–momentum Wigner function for the Planck scale can be useful.

Kik a felelősök?

Azt kapták-e amit akartak?

Klasszikus fizika: Galilei, Kepler, Newton, Hamilton, Lagrange, Laplace, Gauss

Maxwell, Boltzmann, Gibbs, Planck, Einstein

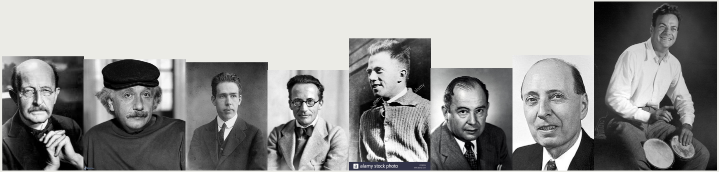


Kik csinálták?

Azt kapták-e amit akartak?

Kvantum fizika: Planck, Einstein, Bohr, Schrödinger, Heisenberg, Neumann, Wigner,

Feynman



Mit tartunk meg, mit cserélünk le a klasszikus fizikából?

Érvényét veszti-e a klasszikus fizika?

...és pontosan hogyan?

Klasszikus mechanika: *Hamilton–Jakobi* egyenlet.

$$H - E = \frac{1}{2m}\left|\frac{\partial S}{\partial x}\right|^2 + V(x) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \tag{1}$$

Schrödinger: $H - E \neq 0$, azonban

$$\int \left(\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left|\frac{\partial S}{\partial x}\right|^2 + V(x) \right) |\psi(x)|^2 \, dx \, dt = \text{extremum}. \tag{2}$$

Boltzmann: $S = k \log W$, Schrödinger: $S = \frac{\hbar}{i} \ln \psi$.

Ebből következik a Schrödinger egyenlet. .

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi + V(x)\psi. \tag{3}$$

Boltzmann vs Schrödinger

A képletek története

Boltzmann:

$$S = k \log W \tag{4}$$

entrópia $=$ Planck nevezte el Boltzmann állandónak $\log$ mikorállapotok száma

Schrödinger:

$$S = \frac{\hbar}{i} \log \psi \tag{5}$$

hatás $=$ Einstein nevezte el Planck állandónak $\log$ eikonál

A variációs elv
variációja

Ha (2)-be beírjuk az eikonál formát:

$$\mathcal{K} \equiv \int \left(\psi^* \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + V(x)\psi^*\psi \right) dx\, dt = \text{extremum.} \qquad (6)$$

Variáljuk ψ^* szerint:

$$\frac{\delta \mathcal{K}}{\delta \psi^*} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x)\psi = 0. \qquad (7)$$

Az együttható $\hbar/i$ muszáj, hogy tisztán képzetes legyen, különben $\mathcal{K}$ nem complex analitikus funkcionálja ψ-nek.

Érvényét veszti-e a klasszikus fizika?

...és pontosan hogyan?

Bohr: mi ragaszkodunk ahhoz, hogy $H - E = 0$.

Ugyanakkor a Schrödinger egyenlet érvényes.

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi + V(x)\psi. \tag{8}$$

A ”történelmi” megoldás: E, P és x operátorok!

$$\hat{E} \equiv i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \qquad \hat{P} \equiv \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}, \qquad \hat{x} \equiv x \cdot \tag{9}$$

ekkor $\frac{\delta \mathcal{K}}{\delta \psi^*} = -\hat{E}\psi + H(\hat{P}, \hat{x})\psi = 0.$

Súlyos következmény: $[\hat{P}, \hat{x}] \equiv \hat{P}\hat{x} - \hat{x}\hat{P} = \frac{\hbar}{i}.$

A vita

Einstein vs Bohr; Schrödinger vs Heisenberg picture

- a klasszikus egyenlet nem igaz;
- a klasszikus mennyiségek léteznek, csak nem követik a klasszikus pályákat;
- a hatás lehet komplex.

- a klasszikus egyenlet igaz,
- de a klasszikus mennyiségek helyett operátorokra érvényes;
- a (komplex) hatás vajon maga is operátor?

Valószínűségi értelmezés

és néhány buktatója

1. $|\psi|^2$ egy PDF *x*-ben ("több mint súlyfaktor...")
2. klasszikusan lehetetlen helyeken $|\psi|^2$ exponenciálisan kicsi[1]
3. bizonyos varianciák ("mérési hibák") szorzatának van alsó határa, $\mathcal{O}(\hbar)$.
4. mérés = "beugrás" sajátállapotba (mennyi idő alatt?)
5. a pontrészecskék kiterjedt propagálása és interferenciája ("hullámtermészet")

[1] **Meddig lehet adósság mellet jól élni?**

A kvantum fizika arcai

abszträkt Hilber tér és reprezentációk

A kvantum fizika

1. sztatikus dolgokra paradox a klasszikus fizika nyelvén.
2. dinamikája örökölte a klasszikus fizikáét.

Egy $|x\rangle$ állapotban az $\hat{x}$ operátor értéke éles (”sajátállapot”)

Egy $|p\rangle$ állapotban a $\hat{p}$ operátor értéke éles (”sajátállapot”)

Ezek az állapotok oszcillálva fednek át: **síkhullám**

$$\langle p|x\rangle = \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}p\cdot x} \tag{10}$$

Bizonyosság a bizonytalanságról

Unschärfe = elmosódottság

A fizikai mennyiségeket hermitikus operátorok írják le, a mérési eredmények mindig valós számok.

Legyen A és B hermitikus operátor, λ valós paraméter, $\langle A\rangle = 0$ és $\langle B\rangle = 0$. Így $\left\langle A^2\right\rangle = \Delta A^2$, $\left\langle B^2\right\rangle = \Delta B^2$.

Vegyük a $C = \lambda A + \frac{i}{\lambda} B$ kombinációt. Ekkor

$$\left\langle CC^\dagger\right\rangle = \lambda^2 \Delta A^2 + \frac{1}{\lambda^2}\Delta B^2 - \langle i[A,B]\rangle \geq 0. \tag{11}$$

Miután a számtani (aritmetikai) közép $\geq$ mértani (geometriai) közép,

$$\Delta A \cdot \Delta B \geq \left| \frac{i}{2}\langle [A,B]\rangle \right| . \tag{12}$$

Ami nem kommutál

az nem lehet egyszerre éles

Híres eset: $A = \hat{p}$, $B = \hat{x}$. Erre

$$\Delta p \cdot \Delta x \; \geq \; \frac{\hbar}{2}. \tag{13}$$

Következmény síkhullám (10) és a **Wigner függvény**

$$W(x, p) \; \equiv \; \int \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar} p \cdot q} \, \psi^*(x + q/2) \, \psi(x - q/2) \, dq. \tag{14}$$

Általában

$$W(x, p) \; \equiv \; \int \langle p | q \rangle \, \langle x + q/2 | \, \hat{\rho} \, | x - q/2 \rangle \, dq. \tag{15}$$

Wigner függvény

és valószínűség eloszlás

A Wigner függvény valós ($\hat{\rho}$ hermitikus), de általában nem mindenütt pozitív.

A marginálisai PDF-k:

$$\begin{aligned} \int W(x,p)\,\frac{dp}{2\pi\hbar} &= |\psi(x)|^2 \,. \\ \int W(x,p)\,dx &= |\tilde{\psi}(p)|^2 \,. \end{aligned} \tag{16}$$

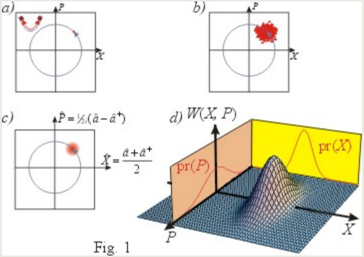
Inverze a Weyl-transzformált:

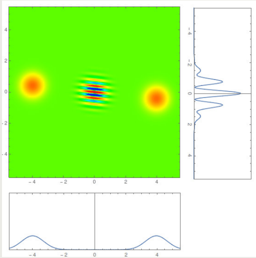
$$\langle x|\hat{\rho}|y\rangle = \int W\left(\frac{x+y}{2}, p\right) \langle p|x-y\rangle \, \frac{dp}{2\pi\hbar} . \tag{17}$$

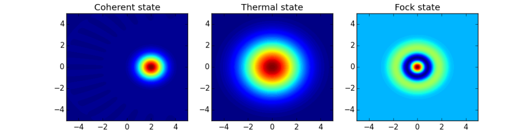
Oszcillátor és Schrödinger macskája

a fázistérben

A macska két koherens állapot összege: $|cat\rangle \sim |z\rangle + |-z\rangle$







Wigner függvény kisimítása

statisztikus szemlélet

A Wigner függvény tipikusan $\mathcal{O}(\hbar)$ tartományon oszcillál.

$\Rightarrow$ Husimi: Gauss–simított Wigner függvény

$\Rightarrow$ Wehrl entrópia $=$ $S_{\mathrm{BG}}[\mathrm{Husimi}]$

Nem hermitikus operátor Wigner transzformáltja már komplex.

Wigner függvény és életlenség

Unschärfe, uncertainty, határozatlanság

Mi oszcillál tulajdonképpen?

$$e^{\frac{i}{\hbar} p \cdot q} = e^{i \frac{p \cdot (q/2)}{(\Delta p \cdot \Delta q)_{\mathrm{min}}}}. \tag{18}$$

Általánosított Wigner függvény magja:

$$e^{i \frac{A \cdot (B/2)}{(\Delta A \cdot \Delta B)_{\mathrm{min}}}} \tag{19}$$

Különleges Wigner függvény

energia és impulzus között!

Energia és impulzus elmosódása is korlátos:

$$\Delta E \cdot \Delta P \;\geq\; \left|\left\langle \frac{i}{2}[\hat{H}, \hat{P}] \right\rangle\right| \;=\; \frac{\hbar}{2}\,|\langle F \rangle|\,. \tag{20}$$

Megint a $H = E$ feltevés miatt, ”öröklődő” módon

$$\Delta H(\hat{P}, \hat{x}) \cdot \Delta P \;=\; |\langle v \rangle|\; \Delta P^2 \;+\; |\langle F \rangle|\; \Delta x \cdot \Delta P \;\geq\; \frac{\hbar}{2}\,|\langle F \rangle|\,. \tag{21}$$

Energia – impulzus elmosódás

mikor mennyi?

- Oszcillátor: $\langle F \rangle = 0$.
- Gravitációs térben: $|\langle F \rangle| = mg = \frac{GMm}{R^2}$
  Ha $\Delta P = mc$, akkor $\Delta E \geq \frac{\hbar}{2c} g \;=\; \pi T_{\mathrm{Unruh}}$.
- Önmaga gravitációja alatt: $|\langle F \rangle| = \frac{GM^2}{R^2}$.
- Schwarzschild rádiuszon ($R = 2GM/c^2$) az elmosódás:

$$\Delta E \cdot \Delta P \geq \frac{\hbar c^4}{8G} = \frac{1}{8} \left(M_P c^2\right) \left(M_p c\right). \tag{22}$$

Újabb Wigner függvény

releváns a Planck skálán

A Planck skálán $\langle E|P\rangle \neq 1$, nincs egyszerre éles érték.

Kínálkozik az energia-impulzus Wigner függvény:

$$W(E,P) \equiv \int \langle P|\epsilon\rangle \, \langle E+\epsilon/2|\hat{\rho}|E-\epsilon/2\rangle \, d\epsilon. \tag{23}$$

Planck skálán

$$W_{PL}(E,P) = \int \mathrm{e}^{i\frac{4G}{\hbar c^4}\, p\cdot\epsilon} \, \langle E+\epsilon/2|\hat{\rho}|E-\epsilon/2\rangle \, d\epsilon. \tag{24}$$

Ha $\hat{\rho}$ energia-diagonális, $\langle E+\epsilon/2|\hat{\rho}|E-\epsilon/2\rangle = f(E)\delta(\epsilon)$, akkor $W(E,P) = f(E)$.

Ha van kvantum gravitáció

oda Wigner – funkcionál kell majd

Határozatlanság az alapváltozó és konjugáltja között van. Ezért

$$\left\langle \frac{\partial S}{\partial g^{\mu\nu}} \middle| g^{\mu\nu} \right\rangle$$

oszcillál.

A Wigner - funkcionál ”hullámterjeszti” a metrika ”zavarait”:

$$W\left[\frac{\partial S}{\partial g^{\mu\nu}}, g^{\mu\nu}\right] \equiv \int \left\langle \frac{\partial S}{\partial g^{\mu\nu}} \middle| h^{\mu\nu} \right\rangle \left\langle g^{\mu\nu} + \frac{1}{2}h^{\mu\nu} \middle| \hat{\rho} \middle| g^{\mu\nu} - \frac{1}{2}h^{\mu\nu} \right\rangle \mathcal{D}[h]. \qquad (25)$$

SUMMA THEORIAE

1. $\Delta A \cdot \Delta B \ \geq \ h_{AB}$ nem természeti törvény
2. nem csak a hely és a sebesség nem lehet éles egyszerre
3. ahol van gravitáció, ott nincs éles energia-állapot
4. a Planck skálán hasznos lehet egy $W(E, P)$ Wigner függvény.