Rend és rendezetlenég a kvantumfizikában

Iglói Ferenc
Wigner FK SZFI
SZTE Elm. Fiz. Tsz.

Wigner-115 Emlékülés, 2017. november 15.

Két probléma tárgyalása:

- **Véletlenmátrix-elmélet és alkalmazása statisztikus mechanikai modellek integrálhatósági kérdéseire**

- **Véletlen kötésű kvantumos mágnesek fázisátalakulásának renormálási csoport vizsgálata**

Véletlenmátrix-elmélet

ANNALS OF MATHEMATICS
Vol. 53, No. 1, January, 1951

ON A CLASS OF ANALYTIC FUNCTIONS FROM THE QUANTUM THEORY OF COLLISIONS

BY EUGENE P. WIGNER

(Received April 27, 1950)

ANNALS OF MATHEMATICS
Vol. 62, No. 3, November, 1955
Printed in U.S.A.

CHARACTERISTIC VECTORS OF BORDERED MATRICES WITH INFINITE DIMENSIONS

BY EUGENE P. WIGNER

(Received April 18, 1955)

ANNALS OF MATHEMATICS
Vol. 67, No. 2, March, 1958
Printed in Japan

ON THE DISTRIBUTION OF THE ROOTS OF CERTAIN SYMMETRIC MATRICES

BY EUGENE P. WIGNER

(Received September 19, 1957)

Véletlenmátrix-elmélet

Motiváció: nagy atommagok spektruma
többezer nívó
statisztikus kérdések

A kölcsönhatás nagyon összetett, részleteiben nem ismert

Wigner elméleti megközelítése:
a komplexitást véletlenszerűséggel helyettesíti

Az aktuális Hamilton operátort megfelelően választott véletlenszerű Hamilton operátorok sokaságának elemének választja

A leírás közelítő, de sok esetben igen pontos eredményre vezet

Analógia: véletlen számok összege – *Gauss*-eloszlás

Statisztikus sokaságok (Wigner-Dyson)

$N \times N$-es hermitikus mátrixok sokasága, a következő valószínűség eloszlással:

$$P(\mathcal{H}) = c \exp[-\beta \mathrm{Tr} V(\mathcal{H})]$$

- Ha $V(\mathcal{H}) \propto \mathcal{H}^2$, gausszi-sokaságról beszélünk.
- Ekkor a mátrixelemek független eloszlásúak.
- $\beta = 1, 2, 4$ a mátrixelemek szabadsági fokát számolja (valós, komplex, valós kvaternió)
- a $\mathcal{H} \mapsto U\mathcal{H}U^{-1}$ transzformáció hatására $P(\mathcal{H})$ invariáns, annak megfelelően, hogy U ortogonális ($\beta = 1$), unitér ($\beta = 2$), szimplektikus ($\beta = 4$) mátrix, beszélünk ortogonális, unitér, szimplektikus sokaságokról.

Univerzalitási osztályok

Univerzális viselkedés, attól függően, hogy melyik véletlen mátrix sokaságba tartozik a Hamilton-operátor.

Gaussian Unitary Ensemble (GUE)

A Hamilton operátornak nincs időtükrözési szimmetriája, pl $\mathcal{H} = \frac{1}{2m}(\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A})^2 + V(x)$

Gaussian Orthogonal Ensemble (GOE)

A Hamilton-operátornak van időtükrözési szimmetriája, de nincs benne spin-pálya kölcsönhatás, pl. $\mathcal{H} = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + V(x)$

Gaussian Symplectic Ensemble (GSE)

A Hamilton-operátornak van időtükrözési szimmetriája és van benne spin-pálya kölcsönhatás, pl. $\mathcal{H} = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + V(x) + A\boldsymbol{LS}$

Gausszi sokaságokra ismert eredmények

Sajátértékek együttes eloszlásfüggvénye

$$P_\beta(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) = C\prod_{i<j}|\lambda_i-\lambda_j|^\beta \exp\left(-A\sum_i \lambda_i^2\right)$$

(n-1)-integrálás után következik a Wigner-féle félkör-tétel:

$$P_N(x)\to P(x) = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}, \quad x=\frac{\lambda}{2\sqrt{N}}$$

Szinttávolság statisztika (közelítő formulák) $s=\lambda_{n+1}-\lambda_n$

$$P_{\mathrm{GOE}}(s) = \frac{\pi}{2} s\exp(-\pi s^2/4)$$

Wigner-féle feltevés

$$P_{\mathrm{GSE}}(s) = \frac{64^3 s^4}{9^3\pi^3}\exp(-64 s^2/9\pi) \quad P_{\mathrm{GUE}}(s) = \frac{32 s^2}{\pi^2}\exp(-4 s^2/\pi)$$

Integrálható rendszerek

Annyi felcserélhető operátort tartalmaz,
amennyi a Hilbert-tér dimenziója

Létezik olyan, a paraméterektől független bázis,
amelyben a Hamilton operátor diagonális.

Ebben a bázisban a diagonális elemek
(a sajátértékek) tekinthetők véletlenszerűeknek.

Ez a Random Diagonal matrix Ensamble (RDE)

A szinttávolság eloszlás a Poisson-statisztikát követi:

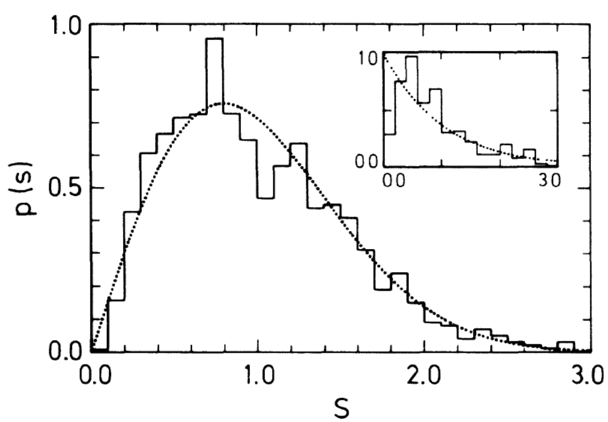
$$P_{\mathrm{RDE}}(s) = \exp(-s)$$

Alkalmazások

- Magfizika (sok-test rendszerek)
- Kvantum káosz-elmélet (néhány-test rendszerek)
- Mezoszkópikus és rendezetlen rendszerek
- Kvantum színdinamika
- Számelmélet
  - Riemann-féle ζ-függvények zéró-helyei és a GUE
- Pénzügy, kockázatelemzés
  - Korrelációs mátrixok analízise
- Statisztikus mechanika rácson

Statisztikus mechanika rácson

- Klasszikus: Ising modell, Potts modell, …
  Transzfer-mátrix sajátértékek
- Kvantumos: Heisenberg modell, Hubbard modell, …
  Hamilton-operátor sajátértékek
- Integrálható-e?
  Szinttávolság statisztika Poisson-eloszlású.
- Nem integrálható?
  Szinttávolság statisztika Wigner-eloszlású.



Technikai lépések

- Hamilton-operátor blokk-diagonális alakra transzformálása
  Paraméterektől független szimmetriák felhasználásával
- Az egyes blokkokban a sajátértékek számolása
  A blokkok dimenziója < 10000, a rendszer mérete L=10-15
- Integrált állapotsűrűség:
  $\rho(\lambda) =$ reguláris-rész(λ)+skála x univerzális-rész(λ)
- Univerzális-rész:
  $$R_1(\lambda)\mathrm{d}\lambda = \mathrm{d}\Lambda$$
- Szinttávolság statisztika összehasonlítása
- RDE és GOE esetén interpolációs (Brody) formula:
  $$P_\beta(s) = c(\beta+1)s^\beta \exp\left(-cs^{\beta+1}\right)$$
  $\beta \sim 0.1$ integrálható, $\beta \sim 0.9$ nem-integrálható

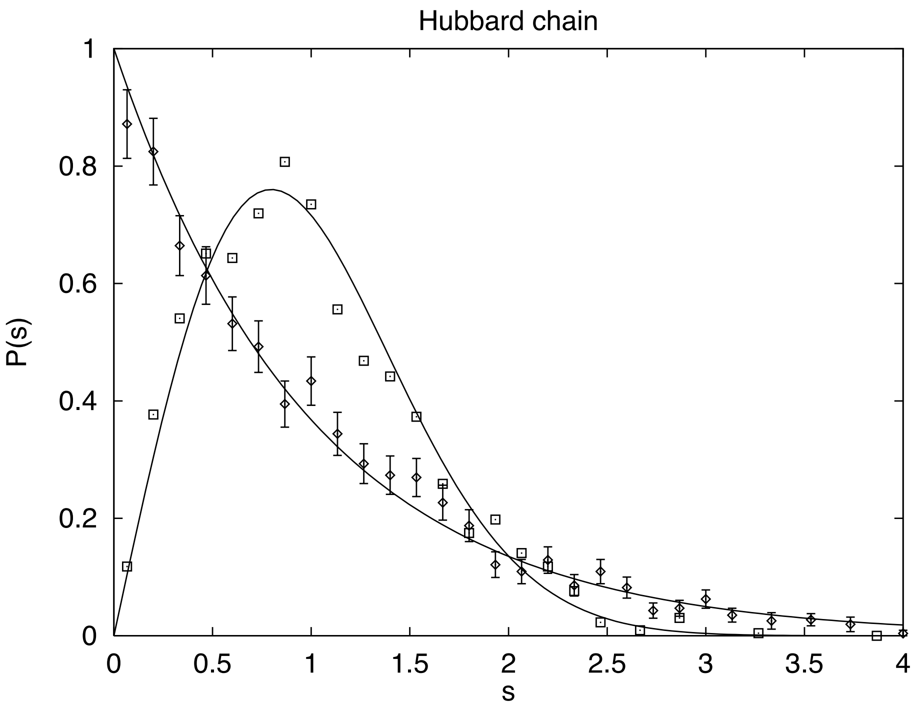
Általánosított Hubbard-lánc

(H. Meyer, J.C. Anglés d'Auriac, J.M. Maillard)

$$\mathcal{H} = t\sum_{i,\sigma} c^\dagger_{i+1,\sigma}c_{i,\sigma} + U\sum_i n_{i\uparrow}n_{i\downarrow} + V\sum_i n_i n_{i+1} + J\sum_i \vec{S}_i\vec{S}_{i+1}$$

Integrálható tartományok

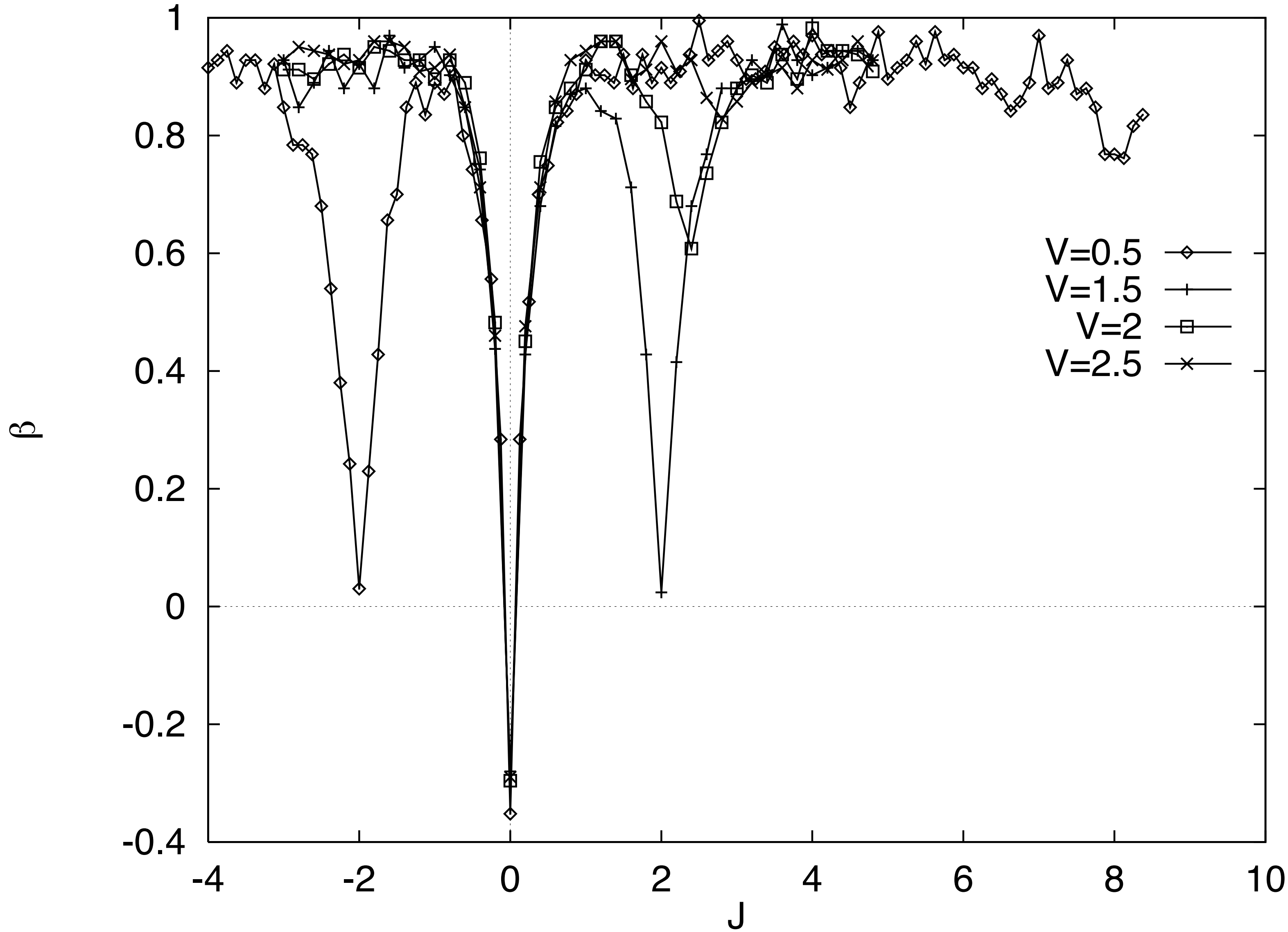
	U/t	V/t	J/t
Hubbard	$\forall$	0	0
$t-J$ supersymetric	∞	$\pm 1/2$	∓ 2
	∞	$\pm 3/2$	± 2
t-0	∞	0	0
XXZ chain	∞	$\forall$	0



t=1,U=10,J=V=0 integrálható, Poisson

t=U=1, V=0,J=2 nem integrálható, Wigner

Brody β-paraméter , $U = \infty$



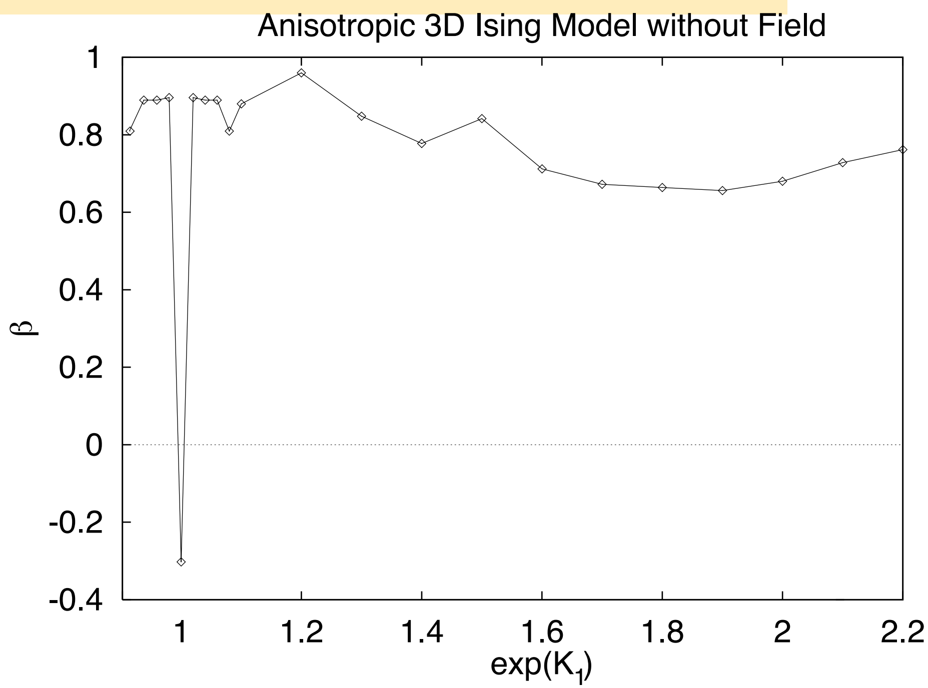
Háromdimenziós Ising modell

(H. Meyer, J.C. Anglés d'Auriac)

- Klasszikus Ising modell köbös rácson
- a csatolás két irányban azonos: $K_2 = 1$
- a harmadik irányban K_1 változó

$K_1 = K_2$ izotrop 3d modell

$K_1 = 0$ 2d modell, integrálható



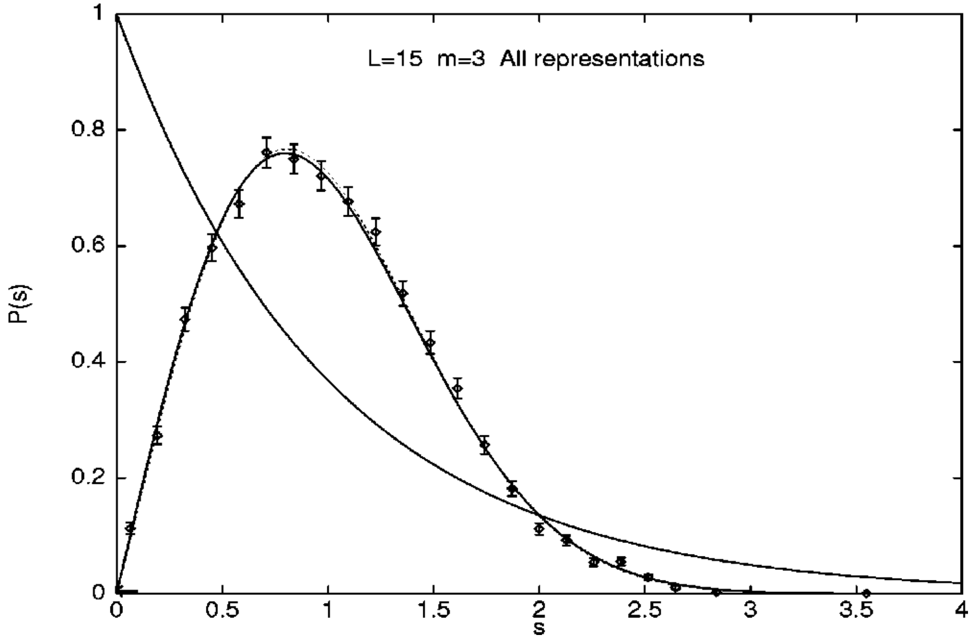
Kvantumos Ising-lánc többspin kölcsönhatással

(J.C. Anglés d'Auriac, F. I.)

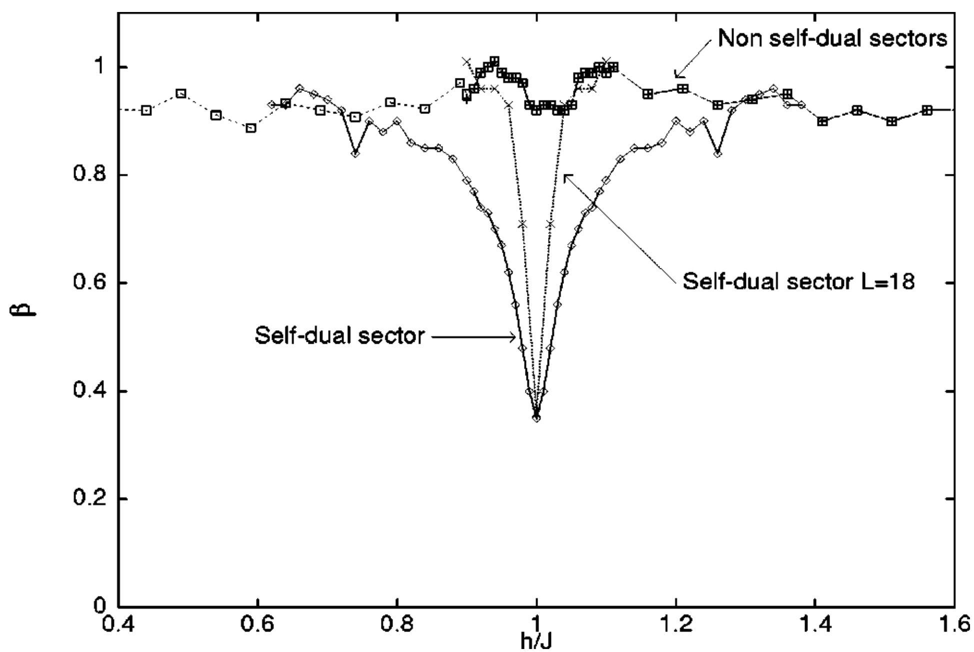
$$\mathcal{H} = -J\sum_l \sigma_l^x \sigma_{l+1}^x \ldots \sigma_{l+m-1}^x - h\sum_l \sigma_l^z$$

- Klasszikus ekvivalens modell:
  2d Ising modell 2-spin és m-spin kölcsönhatással
- Önduális pont: *J=h,* ez a fázisátalakulási pont
- *m=2:* kvantumos Ising-lánc, Onsager-megoldás
- *m=3:* másodrendű fázisátalakulás
  a *Q=4* Potts-modell univerzalitási osztályban
- *m=4,5,…* elsőrendű fázisátalakulás

Integrálható-e m>2 esetén?



Szinttávolság statisztika
m=3, h/J=1.36



Brody β-paraméter

extra szimmetria
az önduális pontban

Wigner-eloszlás
nem integrálható

Összefoglalás I.

J.-Ch. Anglés d'Auriac

Véletlenmátrix-elmélet alkalmazása

- Klasszikus és kvantumos rácsmodellek
  operátorainak spektrumának analízise

- Szinttávolság statisztika Wigner-féle
  Brody-parameter: $\beta \sim 0.9$
  nem integrálható modell

- Szinttávolság statisztika Poisson-féle
  Brody-parameter: $\beta \sim 0.1$
  integrálható modell

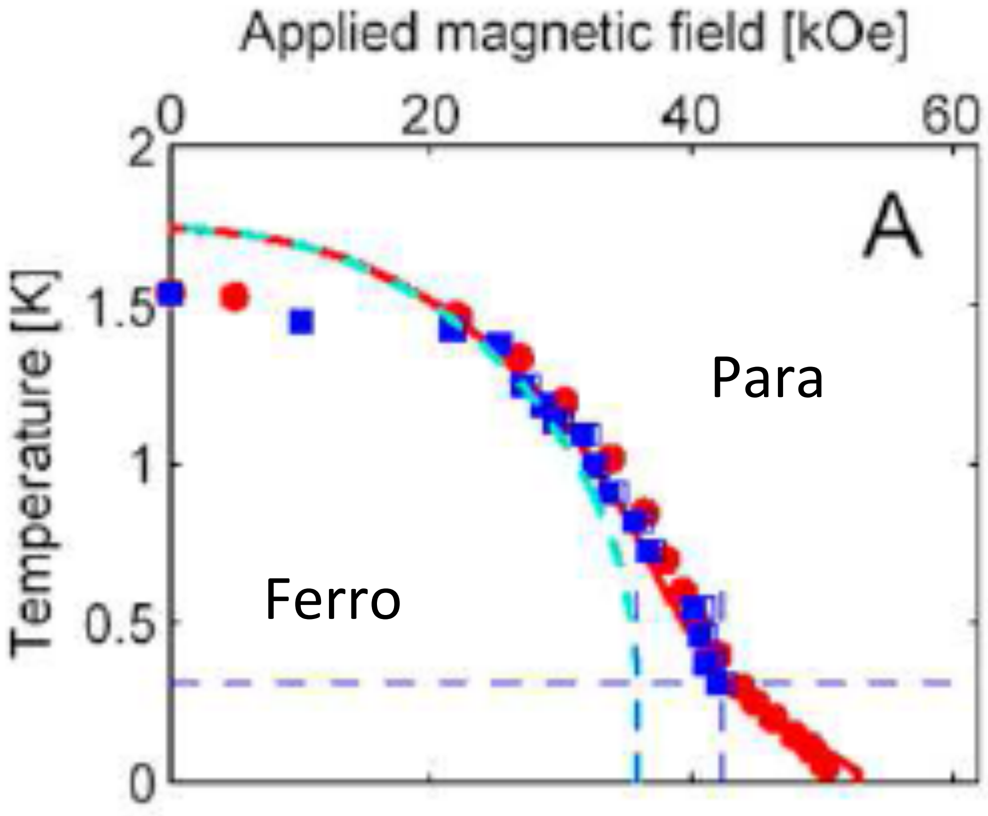
Véletlen kötésű kvantumos mágnesek

- Termikus és kvantumos fluktuációk
- Kvantumos-klasszikus megfeleltetés
- Termikus, kvantumos és rendezetlenségi fluktuációk
- Rendezetlen kvantumos Ising modell
- Erős rendezetlenségi renormálási csoport
- Magasabb dimenziós alkalmazás
- Klaszterszerkezet és kritikus tulajdonságok

Termikus & kvantumos fluktuációk

LiHoF_4 dipol-kötésű
kvantumos Ising ferromágnes

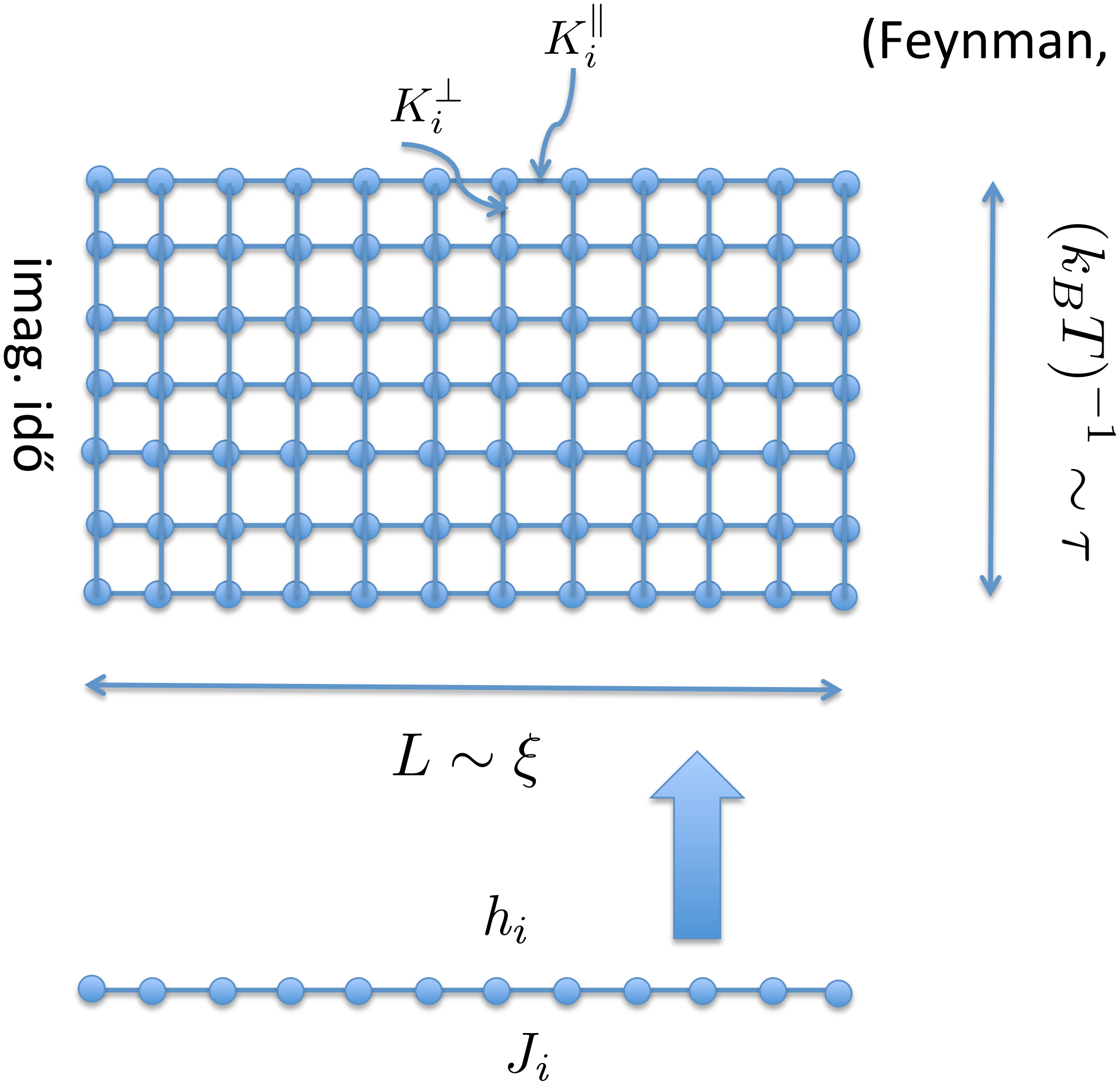
$$\mathcal{H} = -\sum_{i,j} J_{ij}\sigma_i^x\sigma_j^x - H_t^2\sum_i \sigma_i^z$$



(After Ronnow et al., 2005.)

Kvantumos-klasszikus megfeleltetés

(Feynman, Suzuki-Trotter)



(D+1)-dim. klasszikus

$T > 0$ véges szélesség

termikus kritikusság

$T = 0$ végtelen szélesség

kvantumos kritikusság

$$\tau \sim \xi^z$$

z : dinamikai exp.

$z = 1$, homogén

$z \neq 1$, rendezetlen

D-dim. kvantumos

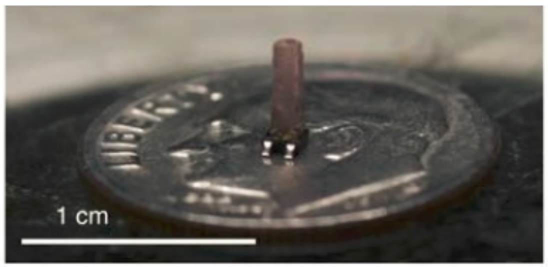
Termikus & kvantumos & rendezetlenségi fluktuációk

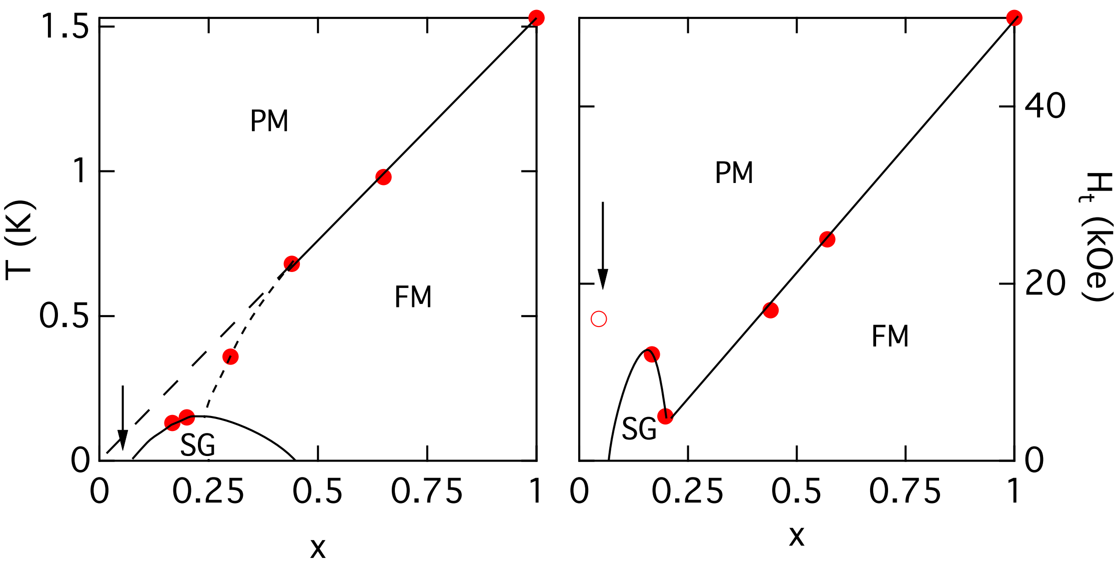
$LiHo_xY_{1-x}F_4$ dipol-kötésű hígított kvantum Ising ferromágnes

$$\mathcal{H} = -\sum_{i,j} J_{ij}\epsilon_i\epsilon_j\sigma_i^x\sigma_j^x - H_t^2\sum_i \sigma_i^z$$

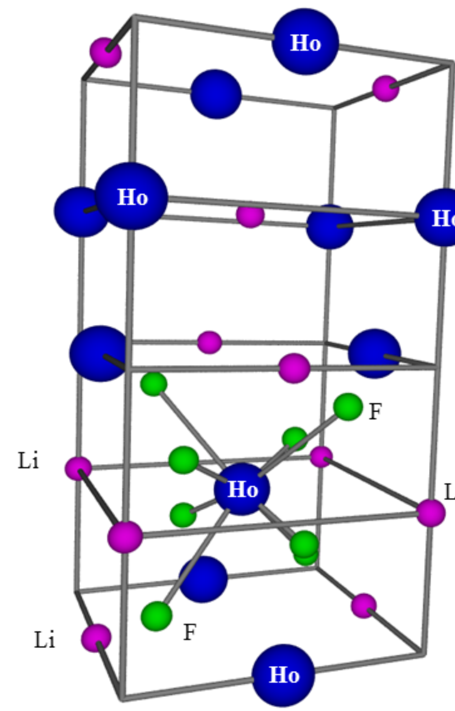
$$\epsilon_i = 1, \quad x \quad \text{valószínüséggel}$$

$$\epsilon_i = 0, \quad 1-x \quad \text{valószínüséggel}$$





(After Ancona-Torres et al, 2008)



$a = b = 5.176$ Å

$c = 10.75$ Å

Rendezetlen kvantum Ising modell

$$\mathcal{H} = -\sum_{(ij)} J_{ij}\sigma_i^x\sigma_j^x - \sum_i h_i\sigma_i^z$$

J_{ij}, h_i véletlen változók

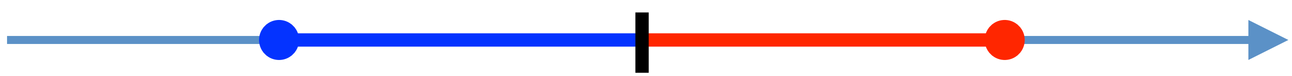
(ij) első szomszéd

Véges, L méretű, rendszerben:

Statika: mágnesezettség $[m]_{av}$

O(1) L^{-x} $\exp(-L^d)$

Rendezett fázis Kritikus pont Rendezetlen fázis



δ

Dinamika : (energia rés) $\exp(-L^d)$ $\exp(-L^\psi)$ $L^{-z(\delta)}$ O(1) $[\ln(h)]_{\rm av} - [\ln(J)]_{\rm av}$

Griffiths fázis

Elméleti vizsgálatok

$\epsilon-$sorfejtés nem működik

kvantum MC - lehetséges

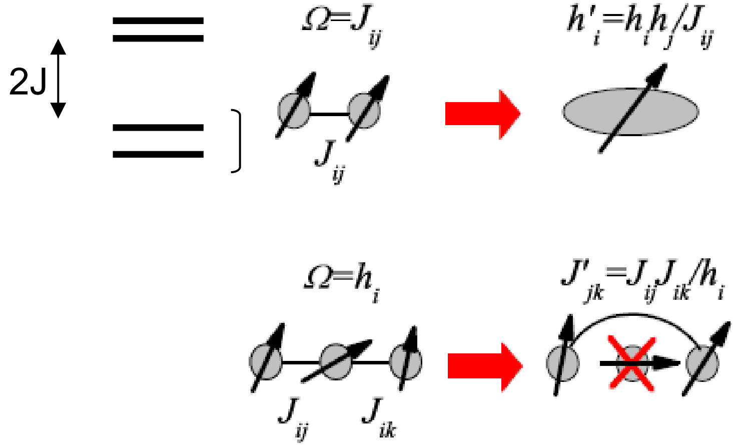
Erős rendezetlenségi RCs ajánlott

Erős rendezetlenségi RCs

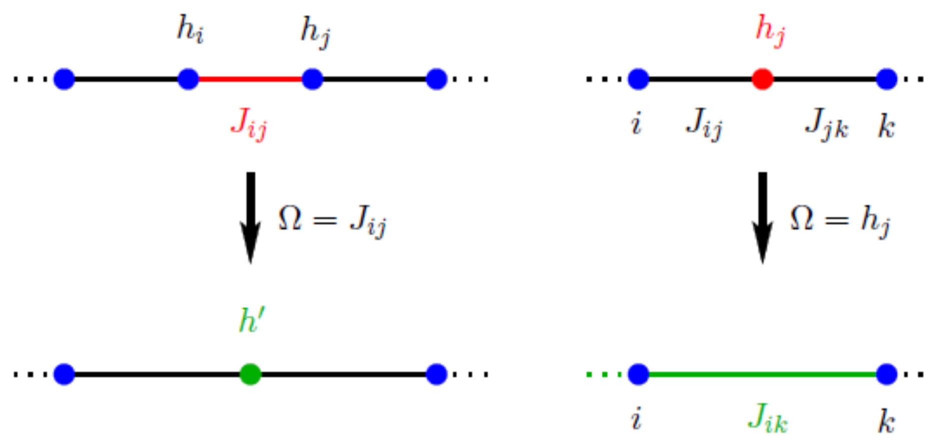
$$\mathcal{H} = -\sum_{(i,j)} J_{ij}\sigma_i^x\sigma_j^x - \sum_i h_i\sigma_i^z$$

Lokális renormálás: egyszerre kezeli a kvantumos
és a rendezetlenségi fluktuációkat

Szabályok:



lánc → lánc



D. S. Fisher (1994): analitikus megoldás 1D-ben a kritikus pontban

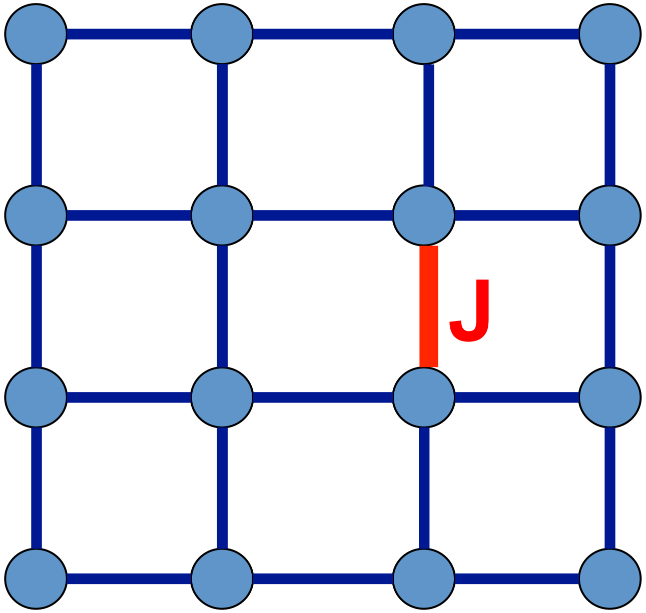
Végtelenül rendezetlen fix-pont:

- 2 effektív csatolás aránya végtelenhez tart
- a renormálási lépések aszimptotikusan egzaktak

Mi a helyzet D>1 esetén?

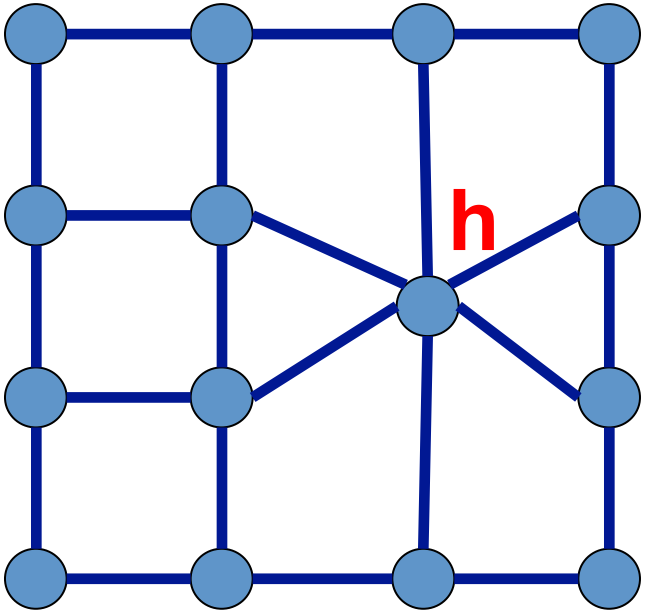
Renormálás magasabb dimenzióban

J a legerősebb



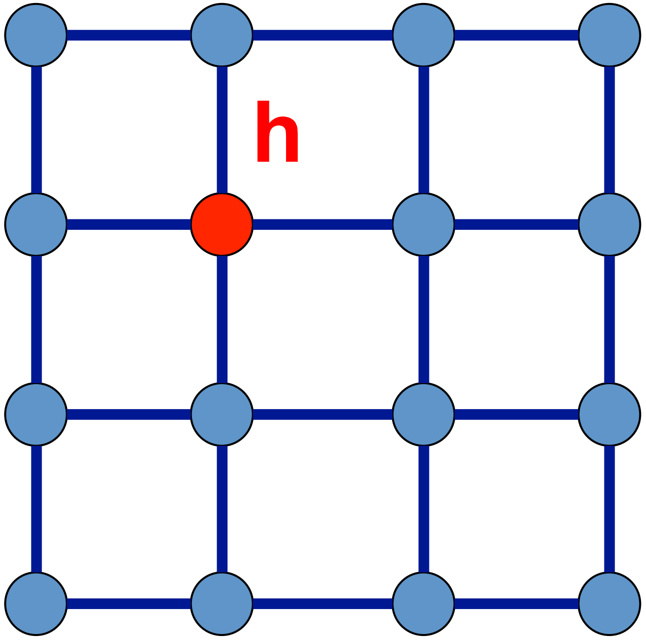
Renormálás magasabb dimenzióban

J a legerősebb



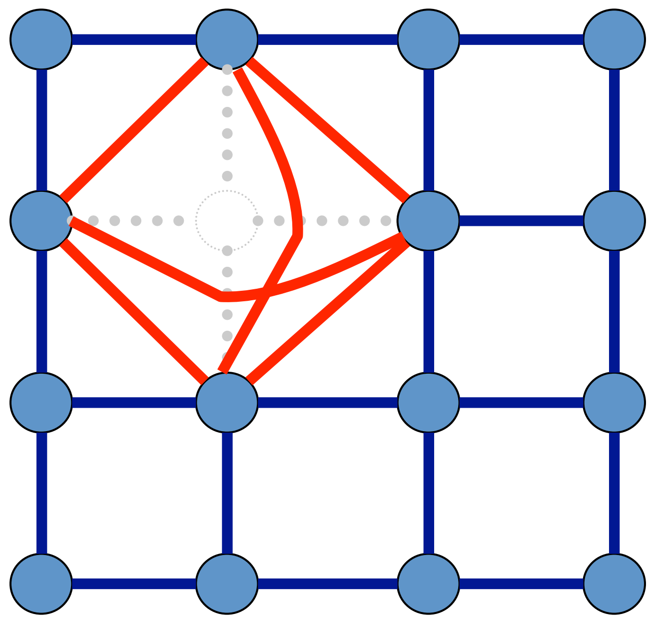
Renormálás magasabb dimenzióban

h a legerősebb

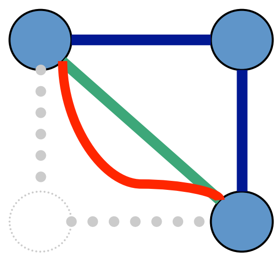


Renormálás magasabb dimenzióban

h a legerősebb



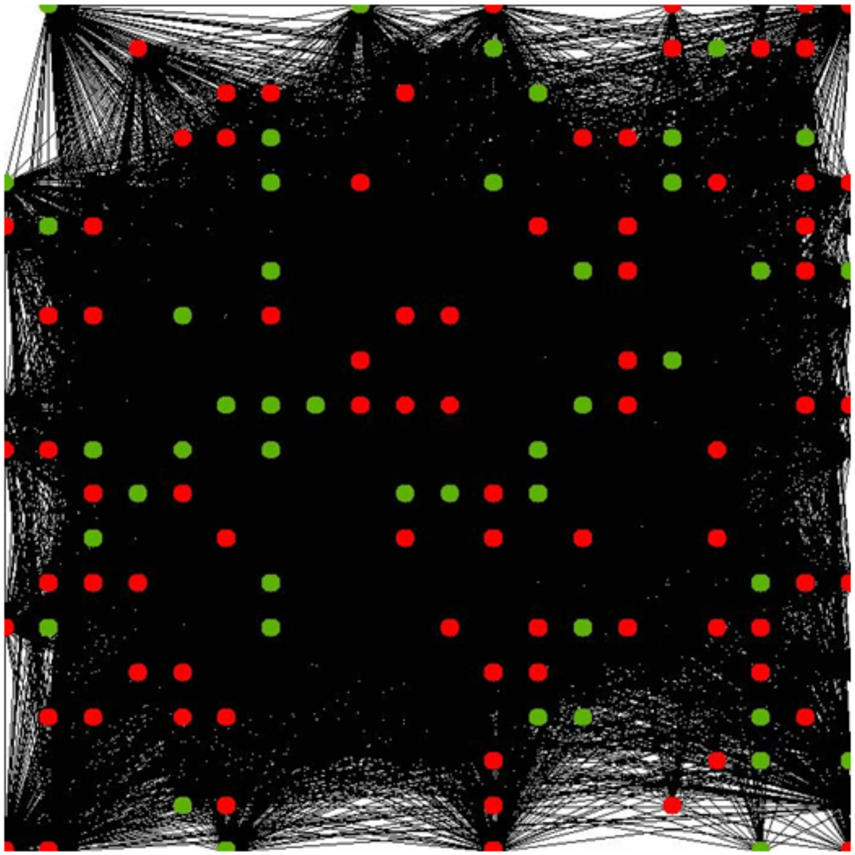
Ha volt ott csatolás:
maximum szabály



Minden lépésben csökken a spinek száma,
de a csatolások száma erősen növekedhet!

Hatékony RCS algoritmus

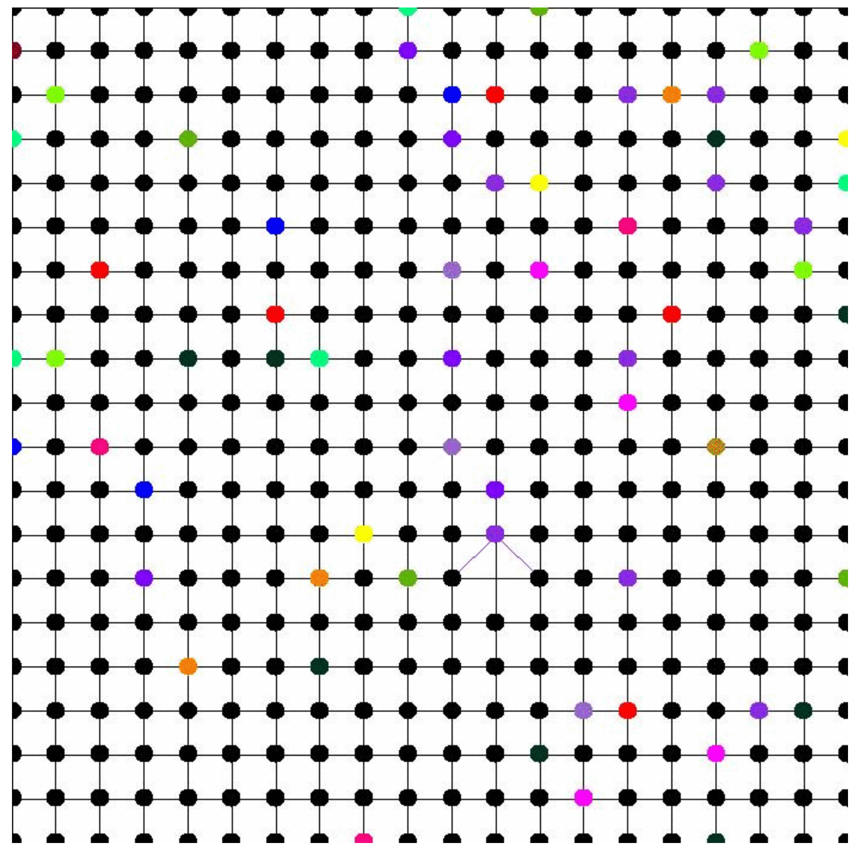
„Tradícionális”



$$t \sim N^3$$

(Kovács & Iglói, 2011a,b)

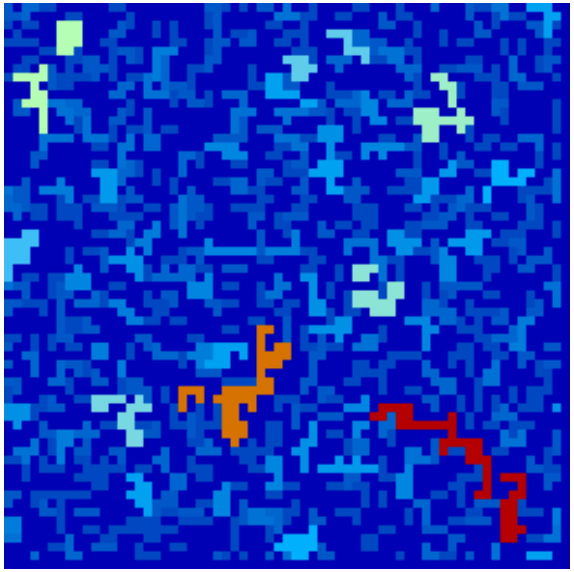
„Új”



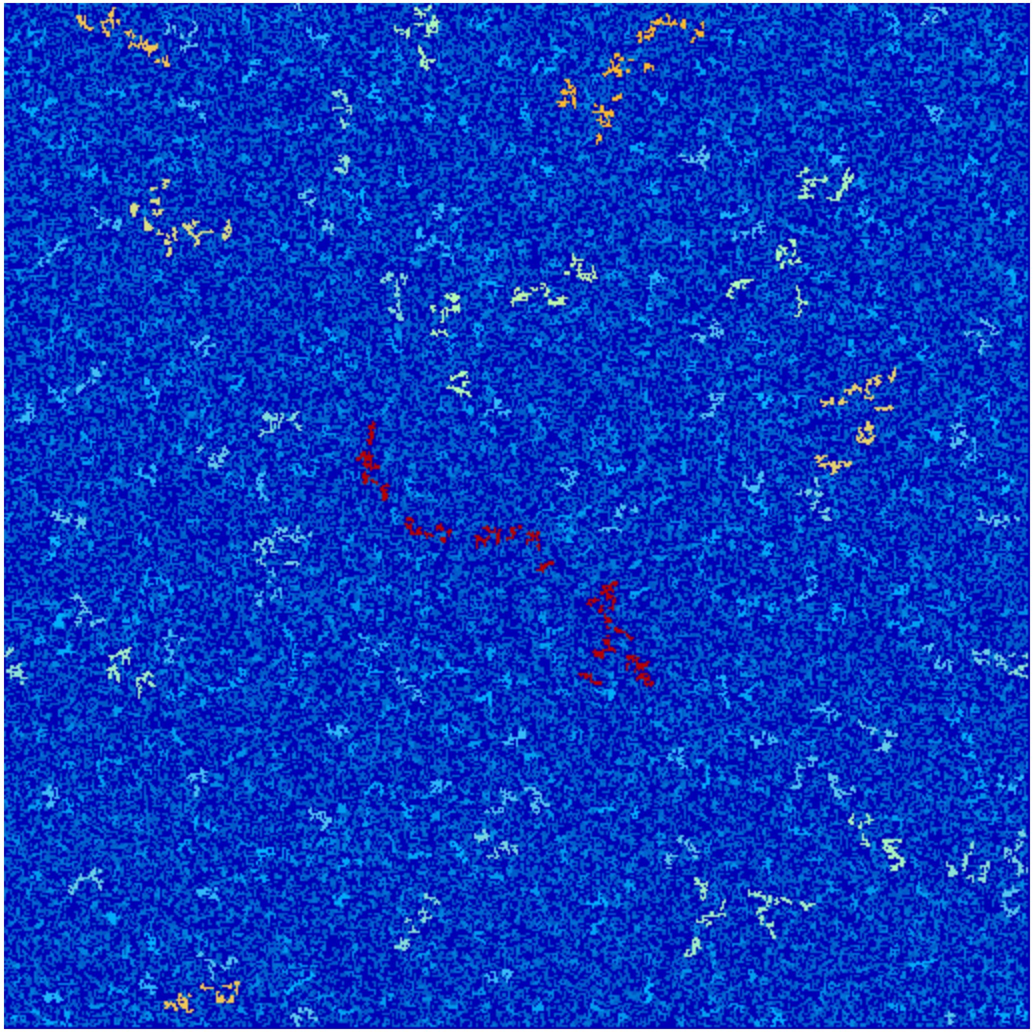
$$t \sim N \log N$$

a csatolások száma nem növekszik

A teljes klaszterszerkezet



L=64



L=512

Fizikai mennyiségek

- Fraktáldimenzió, d_f
  - Mágnesezettség

$$m \sim L^{d_f - d}$$

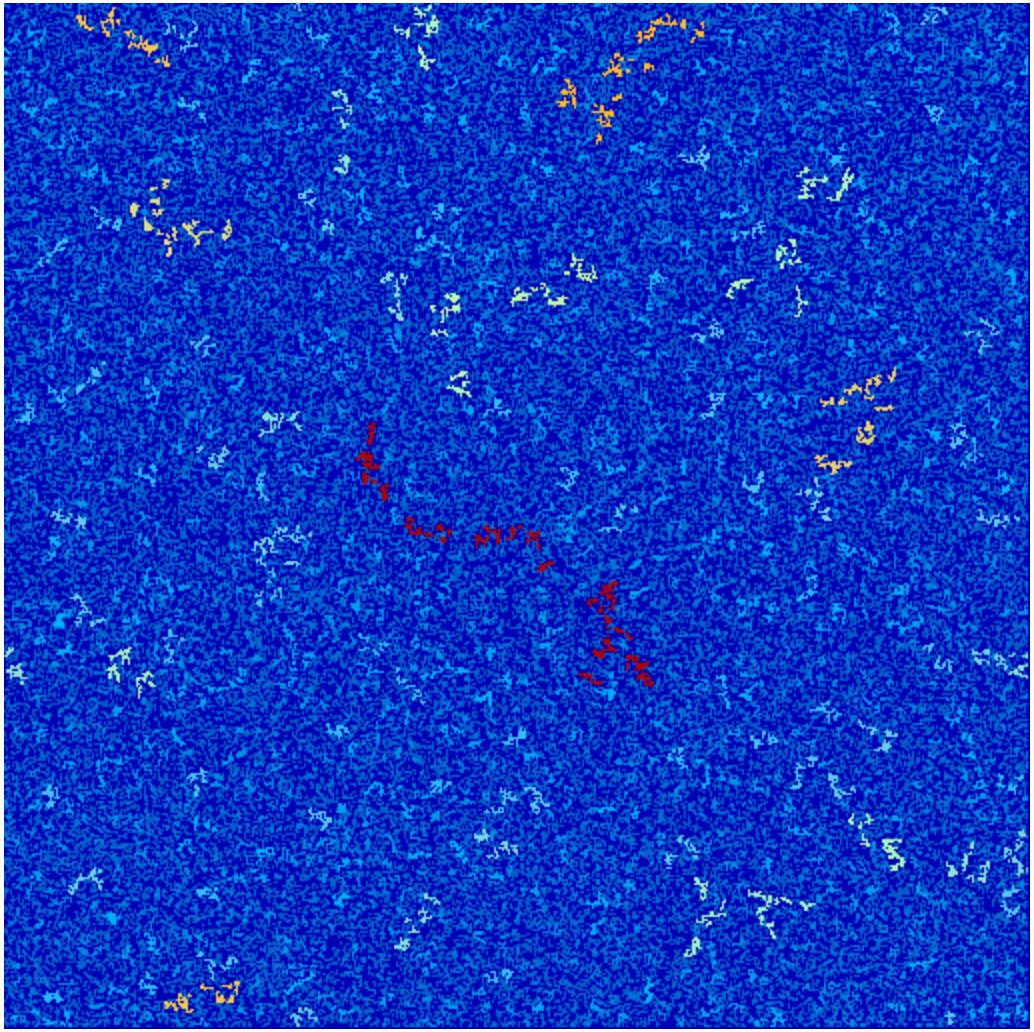
- Klaszter kiterjedése
  - korrelációs hossz

$$\xi \sim |\delta|^{-\nu}$$

- Klaszter energiája
  - energia rés

$$\ln \epsilon \sim L^{\psi}$$

(Kovács & Iglói, 2010)



L=512

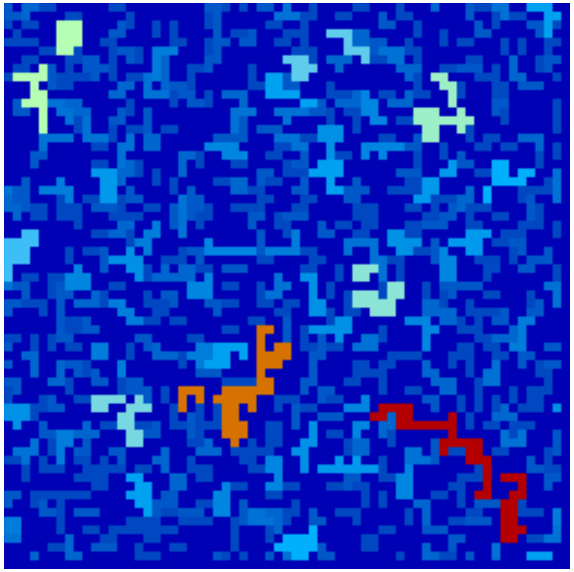
Összefonódás: klaszterek száma

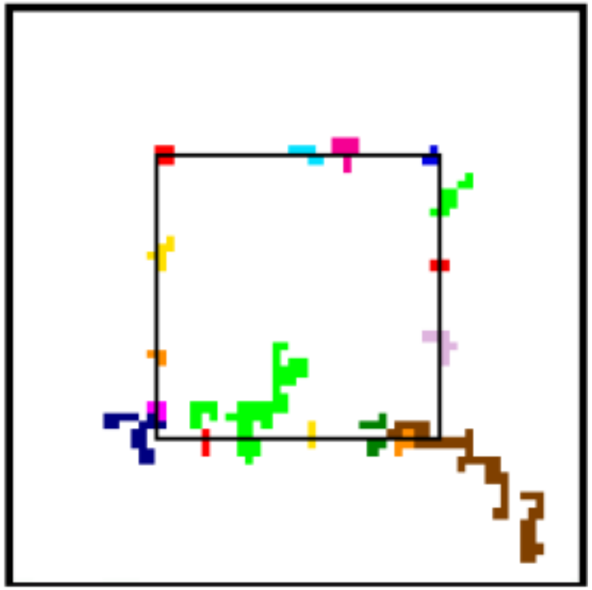
Számszerűsítése: Neumann entrópia

$$\mathcal{S} = -\mathrm{Tr}_{\mathcal{A}}(\rho_{\mathcal{A}} \log_2 \rho_{\mathcal{A}}) \qquad \rho_{\mathcal{A}} = \mathrm{Tr}_{\mathcal{B}}|\Psi\rangle\langle\Psi|$$

Felületi törvény: $\mathcal{S}(\ell) \sim \ell^{d-1}$

Kritikus pontban univerzális logaritmikus korrekciók





$$\mathcal{S}_{1\mathrm{D}}(\ell) = \frac{c}{3}\log_2 \ell$$

$$\mathcal{S}_{2\mathrm{D}}(\ell) = a\ell + b\ln\ell$$

$$\mathcal{S}_{3\mathrm{D}}(\ell) = a\ell^2 + b\ell + c\ln\ell$$

$$\mathcal{S}_{4\mathrm{D}}(\ell) = a\ell^3 + b\ell^2 + c\ell + d\ln\ell$$

A felületi törvény teljesül, de a sarkok következtében megjelenik egy univerzális logaritmikus korrekció

(Kovács & Iglói, 2012)

Összefoglalás

A rendezetlen rendszerek egy tág osztályában:

– a kritikus viselkedés végtelenül rendezetlen,

– a rendezetlenségi fluktuációk abszolut dominánsak,

– az erős rendezetlenségi RCs aszimptotikusan egzakt.

Kapcsolódó munkák

- nemegyensúlyi dinamika *(Iglói et al, 2012)*
- hosszú-hatótávolságú modellek *(Juhász, Kovács, Iglói, 2014, 2015,2016)*

Köszönetnyilvánítás

- J-C. Anglés d' Auriac
- E. Carlon
- B. Doucot
- J. Hooyberghs
- D. Karevski
- N. Kawashima
- Y-C. Lin
- R. Mélin
- M.-T. Mercaldo
- C. Monthus
- M. Preissmann
- H. Rieger
- L. Santen
- A. Sebő
- Zs. Szatmári
- L. Turban
- C. Vanderzande

Közvetlen és jelenlegi munkatársak:

- Lajkó Péter

- Juhász Róbert

- Kovács István

- Roósz Gergő

OTKA K75324, K77629, K109577

Köszönöm a figyelmet!