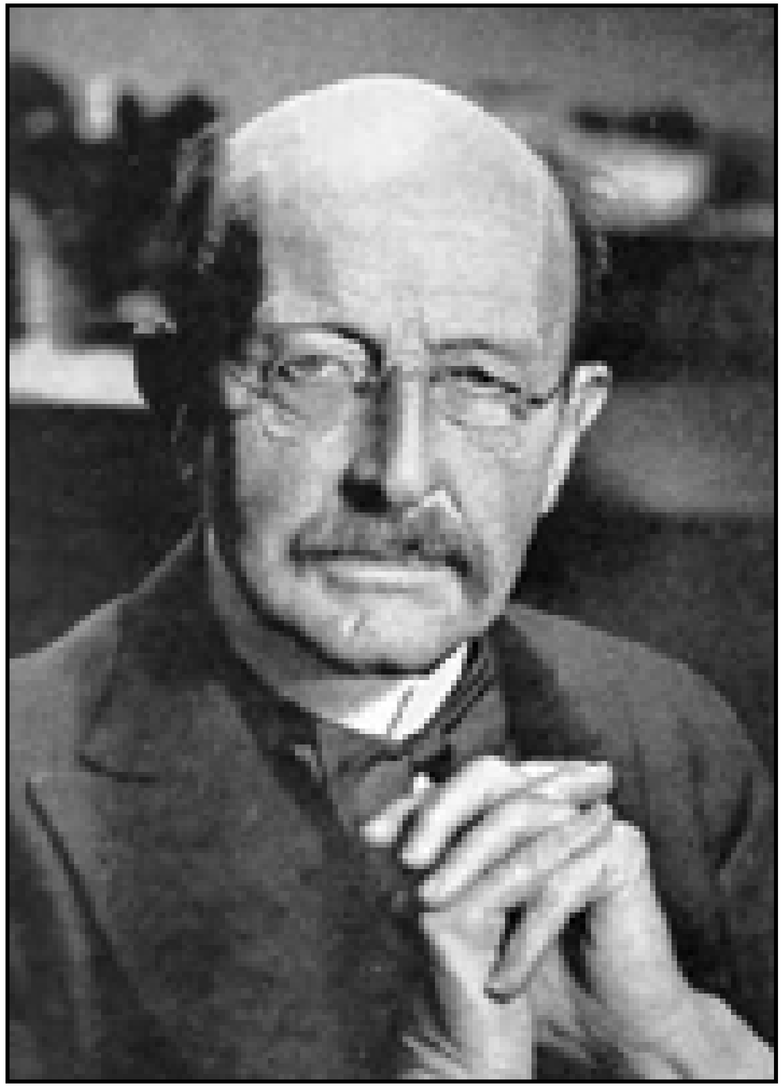
Black-body radiation and the forgotten heritage of Max Planck.

Sándor Varró[1,2]

1) Wigner Research Centre for Physics, SZFI, Hung. Acad. Sci., Budapest

2) ELI-ALPS (Attosecond Light Pulse Source) Research Institute, Szeged

Planck 2018 MTA, 11 October 2018., 14:15h



23 April 1858 (Kiel) – 4 October 1947 (Göttingen)

“*In my opinion, a thorough understanding of a physical theory can be reached only by the historical method. This method enables us to judge whether a certain hypothesis is really necessary to explain the phenomena, whether it can be modified and under what conditions a theory is valid*.”
[B. L. Van der Waerden (1960)]

Newton’s fifth rule of reasoning.
“We are to admit no more causes of natural things than such as are both true and sufficient to explain their appearance.” [Occam’s razor]

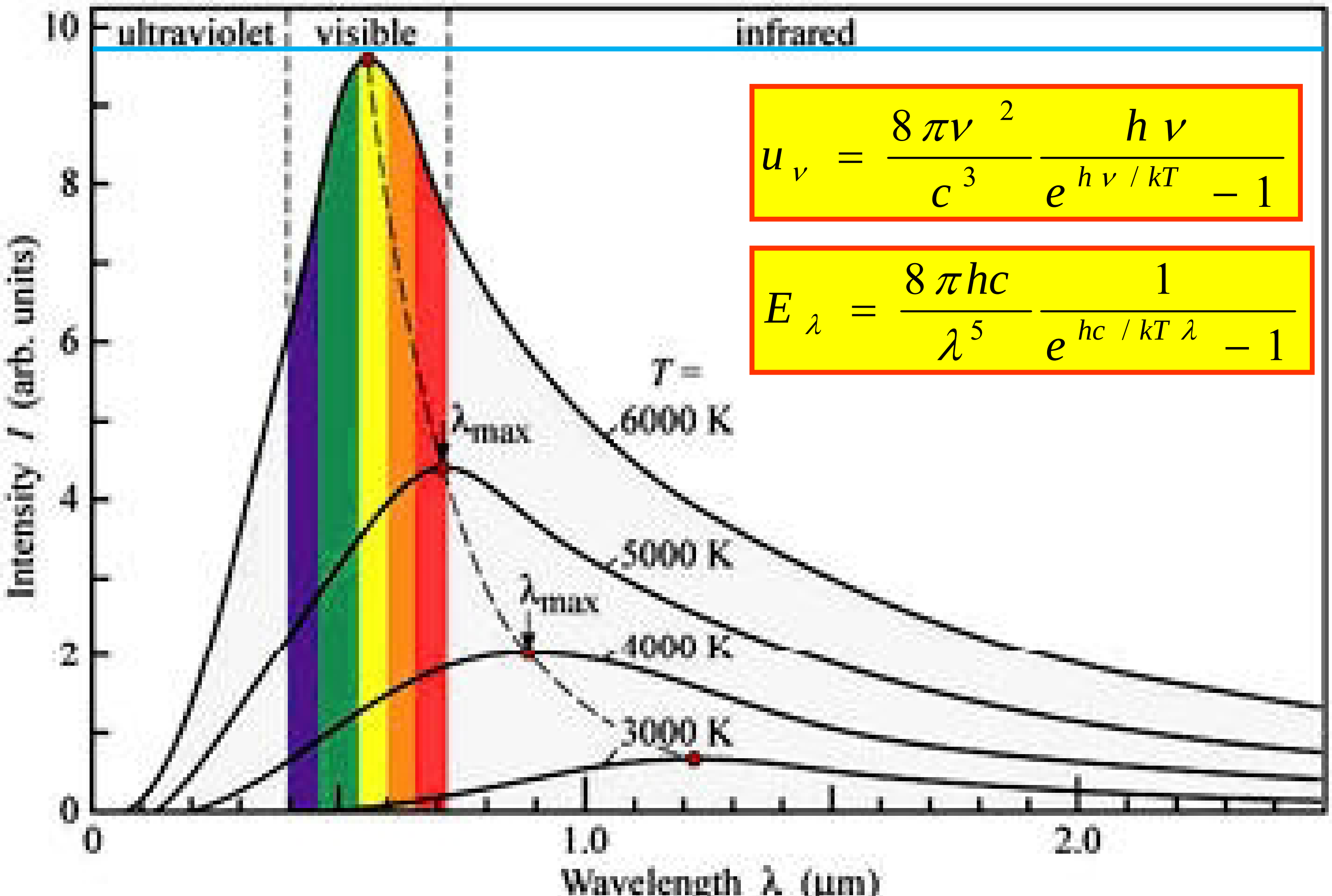
- **Planck’s discovery of ‘*h*’.**
- **Planck’s second theory (1911). [E.g. stimulated emission]**
- **Planck’s treatment of wave propagation in dispersive media.**
- **Planck’s natural system of units (1899).**
- **Planck in Hungary (1936, 1939).**

[• Planck on the the energy fluctuations of the radiation.]

[• Planck’s method of quantization of phase-space.]

The spectrum of black-body radiation.
Planck’s discovery of ‘*h*’ (1900).

The distribution of the spectral energy density of black-body radiation according to the Planck formula.



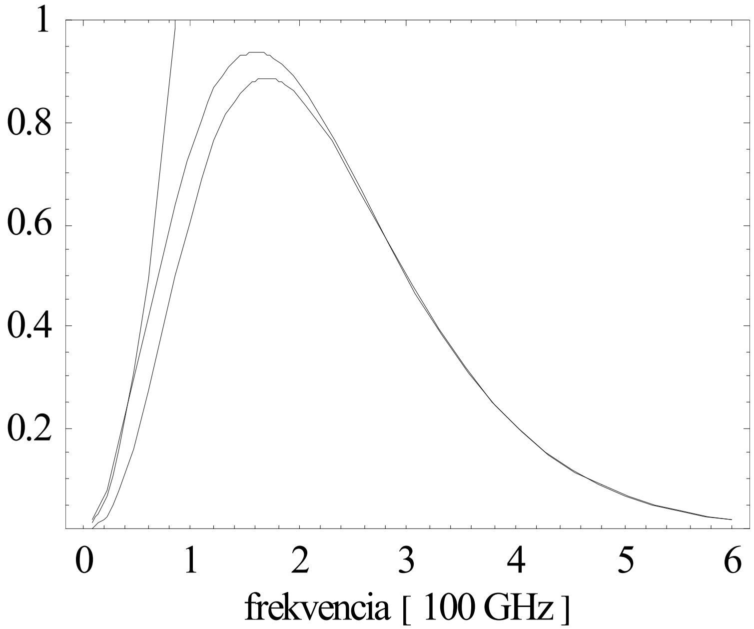
$$u_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\frac{h\nu}{e^{h\nu/kT}-1}$$

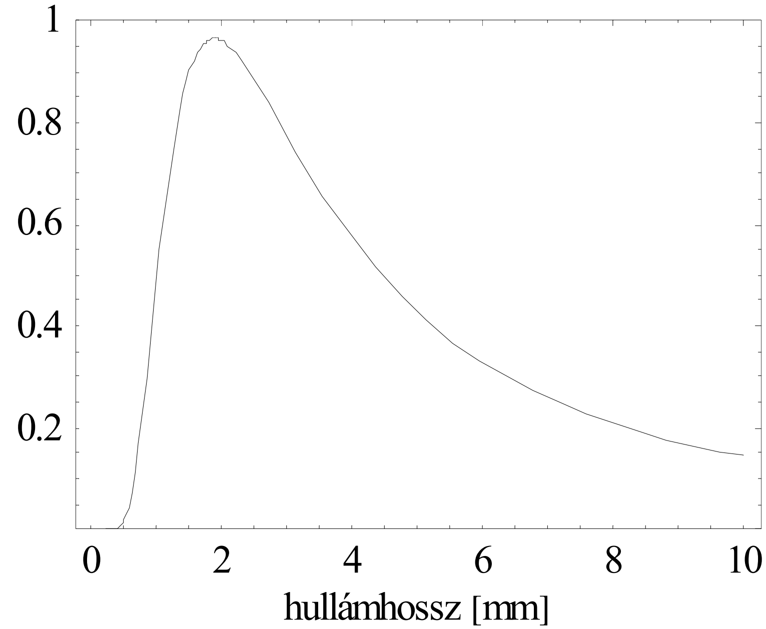
$$E_\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{e^{hc/kT\lambda}-1}$$

Cosmic Microwave Background (CMB) Radiation.

$$u_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\frac{h\nu}{e^{h\nu/kT}-1}$$

$$E_\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{e^{hc/kT\lambda}-1}$$





1a-b. Frequency and wavelength dependence, at 2.725 Kelvin absolute temperature, of the spectral energy density of black-body radiation, according to a formula derived by Planck in 1900. (On the left figure we also show the Wien and the Rayleigh-Jeans approximative dependences.) [We note that according to the measurements by the Cosmic Background Explorer (COBE) satellite, the above curves perfectly desribe the spectrum of the Cosmic Mirowave Backround radiation (CMB), discovered by Penzias and Wilson in 1965.

Varró S, „Planck's interpolation formula for black-body radiation is revisited.". { Derivation from a modified scaling law, without appearent quantization; Talk presented at Seminar 1 of LPHYS'18. [27th International Laser Physics Workshop, 16-20 July 2018, Nottingham, UK] }

Note on the displacement law $\lambda_m \times T$ = const. [Kövesligethy R (1890)]

welche $J_{\lambda T}$ bei constantem T den Maximalwerth erreicht. Es folgt aus Weber's Formel:

(1a) $$\frac{J_{\lambda T}}{J_{\lambda_m T}} = \left(\frac{\lambda_m}{\lambda}\right)^2 e^{-\left(\frac{\lambda_m}{\lambda}\right)^2 + 1},$$

aus Michelson's Formel:

(2a) $$\frac{J_{\lambda T}}{J_{\lambda_m T}} = \left(\frac{\lambda_m}{\lambda}\right)^6 e^{-3\left(\frac{\lambda_m}{\lambda}\right)^2 + 3},$$

aus Kövesligthety's Formel:

(3a) $$\frac{J_{\lambda T}}{J_{\lambda_m T}} = \frac{4\left(\frac{\lambda}{\lambda_m}\right)^2}{\left\{\left(\frac{\lambda}{\lambda_m}\right)^2 + 1\right\}^2}.$$

$$\lambda_m . T = c,$$

$$\lambda_m^2 . T = c,$$

$$\lambda_m . T = c.$$

1) M. W. Michelson, Journ. de Phys. II. 6. p. 467. 1887.
2) Lord Rayleigh, Phil. Mag. 27. p. 460. 1889.
3) R. v. Kövesligthety, Grundzüge einer theor. Spectralanalyse. Halle 1890.

Paschen F, Ueber Gesetzmässigkeiten in den Spectren fester Körper. *Annalen der Physik* (1896).

See also: Balázs G. Lajos, Theoretical astrophysics in the XIX. century. (Hommáge á Radó von Kövesligethy). (2005)

Planck M., „On irreversible radiation processes" [1897-99, 1901]

Planck M., Über irreversible Strahlungsvorgänge [1897-99, 1901]

N × U = P × ε , where P integer; Quantization of the energy of an assemby of N resonators.
ε = h ν [14. Dec. 1900]

27 Gegen die neuere Energetik.
Wied. Ann. 57, S. 72–78, 1896

28 Über elektrische Schwingungen, welche durch Resonanz erregt und durch Strahlung gedämpft werden.
Wied. Ann. 60, S. 577–599, 1897

29 Notiz zur Theorie der Dämpfung elektrischer Schwingungen.
Wied. Ann. 63, S. 419–422, 1897

30 Über irreversible Strahlungsvorgänge. 1. Mitteilung
S.-B. Preuß. Akad. Wiss., S. 57–68, 1897

31 Über irreversible Strahlungsvorgänge. 2. Mitteilung
S.-B. Preuß. Akad. Wiss., S. 715–717, 1897

32 Über irreversible Strahlungsvorgänge. 3. Mitteilung
S.-B. Preuß. Akad. Wiss., S. 1122–1145, 1897

33 Über irreversible Strahlungsvorgänge. 4. Mitteilung
S.-B. Preuß. Akad. Wiss., S. 449–476, 1898

34 Über irreversible Strahlungsvorgänge. 5. Mitteilung
S.-B. Preuß. Akad. Wiss., S. 440–480, 1899

35 Die Maxwellsche Theorie der Elektrizität von der mathemat
Seite betrachtet.
Jahresber. d. Deutsch. Math. Vereinigung 7, S. 77–89, 1899

36 Über irreversible Strahlungsvorgänge.
Ann. d. Phys. (4) 1, S. 69–122, 1900

37 Entropie und Temperatur strahlender Wärme.
Ann. d. Phys. (4) 1, S. 719–737, 1900

38 Über eine Verbesserung der Wienschen Spektralgleichung.
Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 2, S. 202–204, 1900

39 Ein vermeintlicher Widerspruch des magnetooptischen Fa
Effektes mit der Thermodynamik.
Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 2, S. 206–210, 1900

40 Kritik zweier Sätze des Herrn W. Wien.
Ann. d. Phys. (4) 3, S. 764–766, 1900

41 Zur Theorie des Gesetzes der Energieverteilung im Normalspektrum.
Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 2, S. 237–245, 1900

42 Über die von einem elliptisch schwingenden Ion emittierte und absorbierte Energie.
Ann. d. Phys. (4) 9, S. 619–628, 1902

43 Über das Gesetz der Energieverteilung im Normalspektrum.
Ann. d. Phys. (4) 4, S. 553–563, 1901

44 Über die Elementarquanta der Materie und der Elektrizität.
Ann. d. Phys. (4) 4, S. 564–566, 1901

45 Über die Verteilung der Energie zwischen Äther und Materie
Ann. d. Phys. (4) 9, S. 629–641, 1902

46 Über irreversible Strahlungsvorgänge. Nachtrag.
Ann. d. Phys. (4) 6, S. 818–831, 1901

47 Vereinfachte Ableitung der Schwingungsgesetze eines linearen Resonators im stationär durchstrahlten Felde.
Phys. Zs. 2, S. 530–534, 1901

48 Über die Natur des weißen Lichtes.
Ann. d. Phys. (4) 7, S. 390–400, 1902

Abbildungen zu den Beiträgen 4 und 6

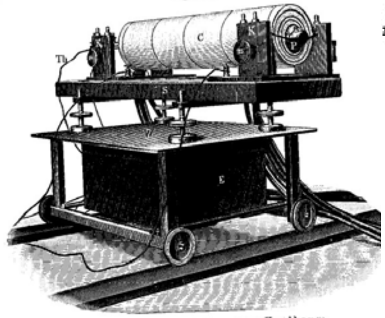
Anmerkung zu Beitrag 4 (Seite 163) und Berichtigung zum Beitrag 14 (Wied. Ann. 36, S. 936, 1889)

„Interpolation formula" [19. Oct. 1900]

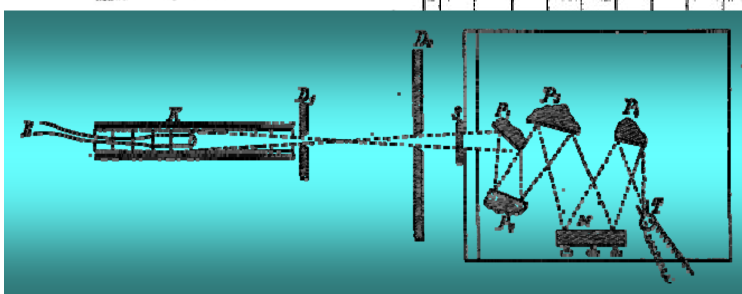
M. Planck, Über irreversible Strahlungsvorgänge. 1– 2– 3 – 4 – 5. Mitteilungen. *Sitzungsber. der Preuß. Akad. der Wissenschaften* (1897-1899). 6. The results of the 1-5. Mitteilungen summarized in *Annalen der Physik* (1900-1).

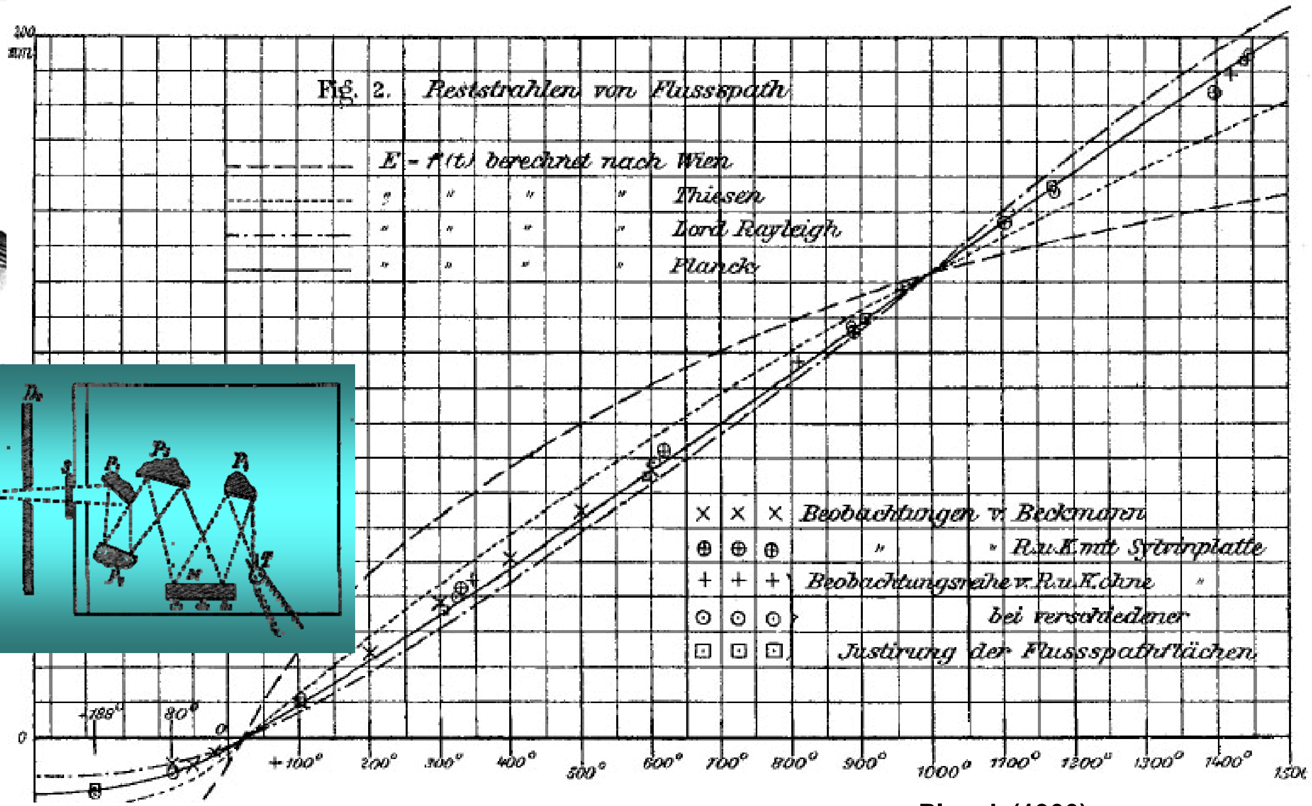
Temperature dependence of the intensity of a spectral component. [„Isochromaten" from -188 ^{o}C up to 1500 ^{o}C]. Rubens and Kurlbaum (1900).

Fig. 1055.



Schwarzer Körper nach Lummer-Kurlbaum.





$$E_\lambda / c_1 =$$

Wien (1896)

$$\lambda^{-5} e^{-c_2/\lambda T}$$

Thiesen (1900)

$$\lambda^{-5}\sqrt{\lambda T}\, e^{-c_2/\lambda T}$$

Rayleigh (1900)

$$\lambda^{-4} T e^{-c_2/\lambda T}$$

Planck (1900)

$$\lambda^{-5} / (e^{+c_2/\lambda T} - 1)$$

The method of 'Reststrahlen'. K. Beckman's Dissertation (1898). H. Rubens und F. Kurlbaum : Anwendung der Methode der Reststrahlen zur Prüfung des Strahlungsgesetzes. *Ann. der Phys.* 2 , 649-666 (1901).
O. Lummer und E. Pringsheim : Kritisches zur schwarzen Strahlung. *Ann. der Phys.* 6 , 192-210 (1901).

Planck's radiation formula; „Interpolation"
[19 October 1900]

The "fortunate interpolation"

Planck (1897-1900): "Irreversible Strahlungsvorgänge" → Wien-formula

$$u_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}U$$

$$dS_t = dU \cdot \Delta U \cdot \frac{3}{5}\frac{d^2S}{dU^2}$$

$$\frac{d^2S}{dU^2} = -\frac{1}{a\nu U}$$

Interpolation

"So waren meine Versuche, die Formel (2) [entropy expression] zu verbessern, an einem toten Punkt angelangt, und ich stand im Begriff, sie endgültig aufzugeben.

Da trat ein Ereignis ein, welches in dieser Angelegenheit Wendung bringen sollte."

"Über eine Verbesserung der Wienschen Spekralgleichung" (19. Okt. 1900.)

F. Kurlbaum & H. Rubens experiment: at very high temperature I ~ T;

Planck: U=CT

$$\frac{d^2S}{dU^2} = -\frac{C}{U^2}$$

$$\frac{d^2S}{dU^2} = -\frac{1}{a\nu U + U^2/C}$$

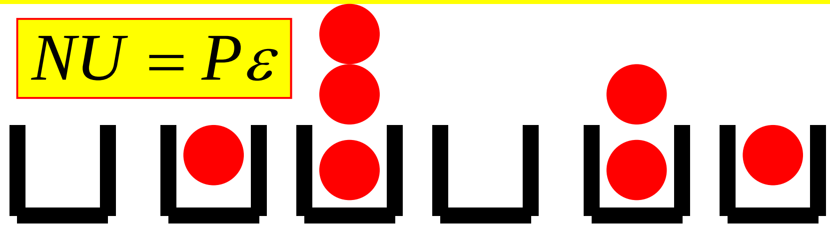
$$\frac{dS}{dU} = \frac{1}{a\nu}\cdot\log\left(1+\frac{b\nu}{U}\right) = \frac{1}{T}$$

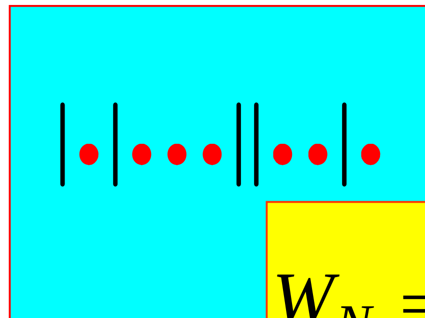
Interpolation

$$U = b\nu/[\exp(a\nu/T)-1]$$

„The Boltzmann principle" (1877). Energy elements (Planck's elementary quantum of action *h*, 1900).

$$NU = P\varepsilon$$





$$S = k \log W$$

$$W_N = \frac{(N-1+P)!}{(N-1)!\,P!}$$

$$S = k[(1+\overline{n})\log(1+\overline{n}) - \overline{n}\log\overline{n}]$$

$$\overline{n} \equiv P/N = U/\varepsilon$$

$$\boxed{\varepsilon = h\nu}$$

Planck M, Ueber eine Verbesserung der Wien'schen Spectralgleichung. *Verhandlungen der Deutsch. Phys. Ges.* 2 (1900) 202-204. (Sitzung vom 19. October 1900.) Planck M, Zur Theorie des Gesetzes der Energie-verteilung im Normalspectrum. *Ibid.*2 (1900) 237-245. (Sitzung vom 14. December 1900.) [Debye P, Der Wahrscheinlichkeitsbegriff in der Theorie der Strahlung, *Ann. der Phys.*(4) 33, 1427-1434 (1910).]

Planck's energy elements. Elementary quantum of action *h*).
[14 December 1900]

Spectral density:

$$u_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} U$$

Wien's displacement law:

$$S = f(U/\nu)$$

U is the average energy
of one Hertz oscillator

Thermodynamics:

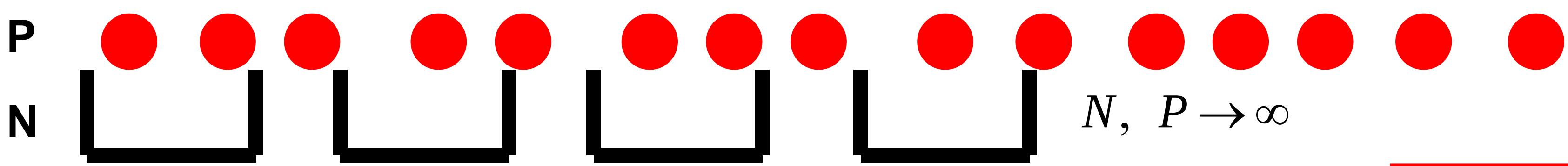
$$dS/dU = 1/T$$

Boltzmann's principle (1877)

$$S_N = k \log W_N$$

$$U_N = NU = P\varepsilon$$

"It comes about to find the probability W of that the N resonators altogether possess the oscillation energy U_N. To this end it is necessary to think of U_N as not being a continuous, unlimitedly divisible quantity, but rather a discrete quantity built up of a finite number of identical parts. When we call such a part an energy element ε, then we have to set : $U_N = P\varepsilon$, where P means an integer, generally a large number, and the value of ε is still to be determined."



$N,\ P \to \infty$

$$S = k[(1+\bar{n})\log(1+\bar{n}) - \bar{n}\log\bar{n}]$$

$$\bar{n} \equiv P/N = U/\varepsilon \longrightarrow \boxed{\varepsilon = h\nu}$$

Planck M, Ueber eine Verbesserung der Wien'schen Spectralgleichung. *Verhandlungen der Deutsch. Phys. Ges.* 2 (1900) 202-204. (Sitzung vom 19. October 1900.) Planck M, Zur Theorie des Gesetzes der Energieverteilung im Normalspectrum. *Ibid.*2 (1900) 237-245. (14. December 1900.) [Debye P, Der Wahrscheinlichkeitsbegriff in der Theorie der Strahlung, *Ann. der Phys.*(4) 33, 1427-1434 (1910).]

$$u_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} U_{\text{mod}}$$

Electromagnetic radiation field components in a 'Jeans cube' [Hohlraum].

$$E_x = \cos\frac{\mathrm{k}\pi x}{L}\sin\frac{\mathrm{m}\pi y}{L}\sin\frac{\mathrm{n}\pi z}{L}(e_1\cos\omega t + e_1'\sin\omega t)$$

$$E_y = \sin\frac{\mathrm{k}\pi x}{L}\cos\frac{\mathrm{m}\pi y}{L}\sin\frac{\mathrm{n}\pi z}{L}(e_2\cos\omega t + e_2'\sin\omega t)$$

$$E_z = \sin\frac{\mathrm{k}\pi x}{L}\sin\frac{\mathrm{m}\pi y}{L}\cos\frac{\mathrm{n}\pi z}{L}(e_3\cos\omega t + e_3'\sin\omega t)$$

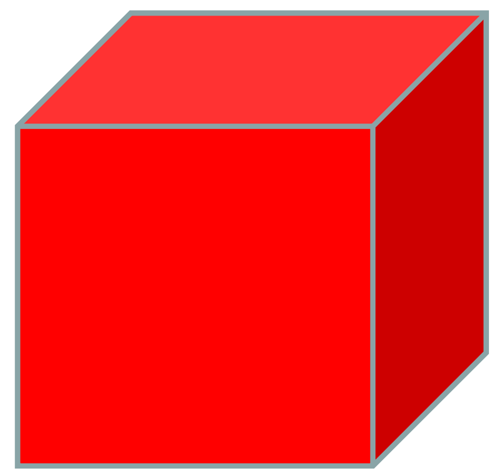
Electromagnetic field components of the 'Hohlraumstrahlung'

$$\omega = \omega_{k,m,m} = \frac{\pi c}{L}\sqrt{k^2 + m^2 + n^2}$$

$$H_x = \sin\frac{\mathrm{k}\pi x}{L}\cos\frac{\mathrm{m}\pi y}{L}\cos\frac{\mathrm{n}\pi z}{L}(h_1\sin\omega t - h_1'\cos\omega t)$$

$$H_y = \cos\frac{\mathrm{k}\pi x}{L}\sin\frac{\mathrm{m}\pi y}{L}\cos\frac{\mathrm{n}\pi z}{L}(h_2\sin\omega t - h_2'\cos\omega t)$$

$$H_z = \cos\frac{\mathrm{k}\pi x}{L}\cos\frac{\mathrm{m}\pi y}{L}\sin\frac{\mathrm{n}\pi z}{L}(h_3\sin\omega t - h_3'\cos\omega t)$$



Varró S, The quantum phase of the photon a Haar integral on the Blaschke group.

PLANCK's own assesment of the significance of *h.*

Born (1948) "**Planck was perfectly clear about the importance of his discovery**. We have not only the testimony of his wife but also an account of his son Erwin, given to and reported by Professor Bavink. It was in 1900 when his father, on a walk in the Grunewald, near Berlin, said to him: **'To-day I have made a discovery as important as that of Newton'.** Planck has, of course, never said anything like that in public. His modest and reluctant way of speaking about his work has caused the impression that he did himself not quite believe in his result. Therefore, the opinion spread, especially outside Germany, that Planck 'did not seem to know what he had done when he did it', that he did not realize the range of his discovery. That this is wrong can clearly be seen from his autobiography; though it was written in his old age, we have no reason to doubt that it correctly reflects his thoughts in the years following his discovery."

PLANCK, THEORIE DER WÄRMESTRAHLUNG (1906)

PLANCK, THEORY OF HEAT RADIATION (1914)

“Probably no single book since the appearance of Clerk Maxwell’s ELECTRICITY AND MAGNETISM **has had a deeper influence on the development of physical theories.”**

***Morton Masius: Translator’s preface* (*1914*)**

Planck's 'heaviest' forgotten heritage.

Electromagnetic H theorem,"Natürliches Licht", "Molecular disorder"

Boltzmann (1872): ...$H_1 \geq H_2 \geq \ldots \geq H_{n-1} \geq H_n \ldots$ (Irreverzibilitás, H=-S)
Loschmidt (1876): "Umkehreinwand" ...$H_n' \leq H_{n-1}' \leq \ldots \leq H_2' \leq H_1' \ldots$
Zermelo (1896) [Poincaré (1890)]: "Wiederkehreinwand"
Boltzmann's response: "Molecular disorder" POSTULATE.

Planck (1896-1900): "Irreversible Strahlungsvorgänge"
Boltzmann's critics (1898): "convergent waves" (B⟶-B)
"Denn der ganze Vorgang kann ebensogut auch in gerade umgekehrte Richtung verlaufen. Man braucht nur in irgendeinem Zeitpunkt das vorzeichen aller magnetische Feldstärken, mit Beihaltung der elektrischen Feldstärken, umzukehren. Dann saugt der Oszillator die in konzentrischen Kugelwellen emittierte in ebensolchen Kugelwellen wieder ein, und gibt die aus der erregenden Strahlung absorbierte Energie wieder von sich." Von Irreversibilität kann also bei einem derartigen Vorgang nicht die Rede sein."
Planck's response: "Natürliches Licht" POSTULATE.

(Source: Zur Geschichte der Auffindung des physikalischen Wirkungsquantums. *Fassung letzter Hand.* Naturwisswenschaften. Vol. 31, pp. 153-159 (1943).)

Planck’s second theory (1911). Quantum jumps. Stimulated emission. Zero-point energy.

In 1911 Planck published his so-called ‘second theory’, in which he gave plausible arguments for the ‘emission postulate’: $(1-\eta)/\eta=p\cdot u$, i.e. the ratio of the probability that the oscillator does not emit and the probability of emission is proportional with the spectral energy density u. He calculated $p=c^3/8\pi\nu^2 h\nu=B/A$, where B and A are the ‘Einstein coefficients’ (1916). From this it follows that Plancks’s emission coefficient $\eta=A/(A+B\cdot u)$ is the ratio of the ‘spontaneous’ and the complete, ‘spontaneous+induced’ emission probability.

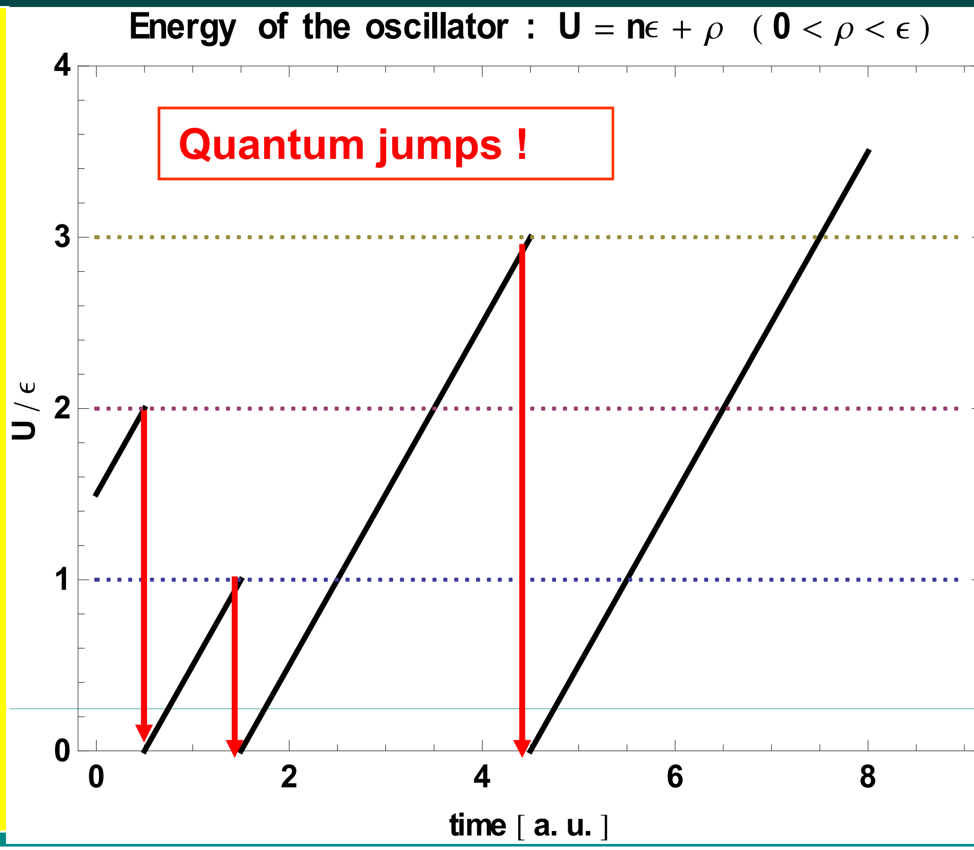


Figure 1. Illustrates Planck’s emission law [7], where the tilted straight lines represent the **continuous energy increase** of a particular oscillator. When a straight line crosses a dotted line (corresponding to integer multiples of the energy quantum $\varepsilon=h\nu$), then an **emission *may* take place abruptly by chance**, and a continuous increase of the energy starts again. In 1911 Planck derived the occupation probability of the n-th level $P_n=b^n/(1+b)^{1+n}$, where $b=[\exp(h\nu/kT)-1]^{-1}$. The time average of the fractional energy turns out to be $h\nu/2$, which is just the ‘**zero-point energy**’. The distribution P_n is the so-called ‘Bose–Einstein distribution’, **rederived by Wilson in 1916, rediscovered by Bose in 1924.**

Planck's 'Second Theory' (1911): Rate equations; Induced emission; "Bose distribution"; zeropoint energy

$$\frac{1-\eta}{\eta} = p \cdot u, \qquad p = \frac{c^3}{8\pi\nu^2 h\nu} = \frac{B}{A} = \frac{1}{Z_\nu \cdot h\nu}$$

A and B are the Einstein's coefficients (1916-17)

$$\eta = \frac{A}{A + B \cdot u} \qquad\qquad 1-\eta = \frac{B \cdot u}{A + B \cdot u}$$

The emission coefficient (η) introduced by Planck, is nothing else but the ratio of the spontaneous and the total (spontaneous plus induced) rates. Planck calculated the occupation of the oscillator levels from a RATE EQUATION.

„Bose distribution".

$$w_n = \frac{\beta^n}{(1+\beta)^{1+n}}, \qquad \beta = \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} = \bar{n}$$

Zero-point energy.

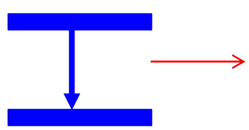
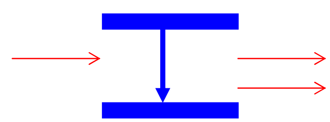
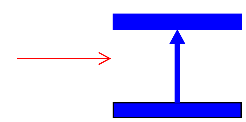
$$u = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\left[\frac{h\nu}{2} + \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}\right]$$

$$\int_0^1 dt\ t = \frac{1}{2}$$

The 1st Solvay Congress (1911).

N. Strautmann, On the first Solvay Congress in 1911. arxiv:1109.3785v2 [physics.hist-ph] (22 Oct 2011). Figure 2: The portrait of participants to the first Solvay Conference in 1911. *Notes on Fig. 2. Left to right seated: Walter Nernst; Marcel-Louis Brillouin; E. Solvay; Hendrik* Lorentz; Emil Warburg; Jean-Baptiste Perrin; Wilhelm Wien; Marie Curie; Henri Poincar´e. Left to right standing: Robert Goldschmidt; Max Planck; Heinrich Rubens; Arnold Sommerfeld; Frederick Lindemann; Maurice de Broglie; Martin Knudsen; Friedrich Hasen¨ohrl; G. Hostelet; E. Herzen; Sir James Jeans; Ernest Rutherford; Heike Kamerlingh-Onnes; Albert Einsten; Paul Langevin. Further remarks: M. de Broglie (the elderly brother of Louis de Broglie), F. Lindemann**.** and R.B. Goldschmidt were appointed as secretaries; G. Hostelet and E. Herzen were co-workers of E. Solvay. Solvay was not present at the time the photo was taken; his photo was pasted onto this one for the official release (resulting in a rather big head).
See also a detailed paper in Hungarian: **Radnai Gyula, Az Első Solvay-Konferencia Centenáriumán. II. *Fizikai Szemle* 2011/9. 316.o**.

Induced emission [Planck, 1911, Einstein, 1916], maser [1954], laser [1960]

Spontaneous emission : $N_2 A_2$	Induced emission : $N_2 B_2 u$	Absorption : $N_1 B_1 u$
		

Dirac (1927):

$$\hat{a}^+ |n\rangle = \sqrt{n+1}\, |n+1\rangle$$

Question on stimulated emission: If we distinguished (in one mode!) the spontaneous and stimulated emission á lá Einstein, then one may ask;
which „1" corresponds to the spontaneous emission?

$$\sqrt{n+1} = \sqrt{1+1+\ldots+1}$$

Negative absorption (dispersion): Stimulated emission. Kopfermann & Ladenburg (1928).

438 NATURE [SEPTEMBER 22, 1928

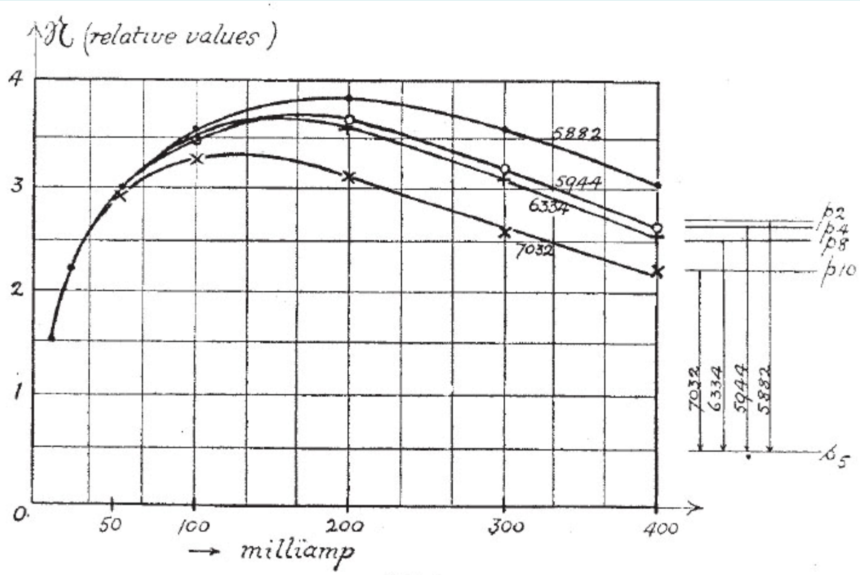


FIG. 1.

"In the Planck formula of temperature radiation, the – 1 in the denominator [exp(hν/kT) – 1] results from taking the processes of negative absorption into account. This – 1 gives the whole difference between the formulae of Planck and W. Wien. It is well known, from the experiments of Lummer-Pringsheim and Rubens-Kurlbaum, that the difference between these two formulae and also the validity of the Planck formula, come out the more clearly the smalles the relation, that is, the larger the temperature (or the excitement) and the larger the wavelength."

H. Kopfermann and R. Ladenburg *Experimental Proof of 'Negative Dispersion'*, *Nature* Volume 122, 438-439 (22 September 1928).

Wave propagation in dispersive media. The concept of intensity and group delay. [Planck (1898-1900), Laue (1904-1905)]

On the Nobel Prize in Physics 2018.

Planck (1900) and Laue (1905): Wave propagation. Intensity. Group velocity. Delay.

4. *Ueber irreversible Strahlungsvorgänge;*
von Max Planck.

(Nach den Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin vom 4. Februar 1897, 8. Juli 1897, 16. December 1897, 7. Juli 1898, 18. Mai 1899 und nach einem auf der 71. Naturf.-Vers. in München gehaltenen Vortrage für die Annalen bearbeitet vom Verfasser.)

'Radiator' & Analysator'

$$Z(t) = \int d\nu \, C_\nu \, e^{i(2\pi\nu t - \vartheta_\nu)}$$

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{\text{interfaces}} \left(\frac{d\varphi_\nu}{d\nu} \right)_0$$

$$\tau = 2\hbar \frac{d\eta}{dE}$$

5. *Die Fortpflanzung der Strahlung in dispergierenden und absorbierenden Medien;*
von M. Laue.[1])

$$I_0'(t) = e^{-\kappa_0 x} I_0 \left\{ t - \frac{x}{c} \left[\frac{d(\nu \cdot n_\nu)}{d\nu} \right]_0 \right\}$$

Planck M 1900 Ueber irreversible Strahlungsvorgänge. *Annalen der Physik (4)* 1, 69-123 (1900)

Laue M von 1905 Fortpflanzung der Strahlung in dispergierenden und absorbierenden Medien. *Annalen der Physik* (4) 18, 523-566 (1905)

Sommerfeld [1914] : ‘Superluminar propagation’ and ‘Precursors’ [‘Vorläufer’].

gungen in 2π Zeiteinheiten), k die „Wellenzahl“ (Anzahl der Wellenlängen auf 2π Längeneinheiten), V die Phasengeschwindigkeit, U die Gruppengeschwindigkeit bei der Frequenz n und sieht man von der Absorption ab, setzt also k als reell voraus, so ist bekanntlich

$$V = \frac{n}{k}, \qquad U = \frac{dn}{dk}$$

wofür man auch schreiben kann

$$U = \frac{d(Vk)}{dk} = V + k\frac{dV}{dk} = V - \lambda\frac{dV}{d\lambda}.$$

Bei anomaler Dispersion $dV/d\lambda < 0$ wird hiernach $U > V$. Ist also V bereits größer als c so würde ein Fortschreiten des Signals mit der Gruppengeschwindigkeit U erst recht zu einer Überlichtgeschwindigkeitswirkung führen, die relativtheoretisch unmöglich ist.

„Here the group velocity as a signal velocity looses its meaning; the constructed relativistic difficulties are based on the overestimation of the notion of group velocity, in comparison with the wave velocity, which is usually called „the velocity of light.”

$$\xi = \omega_p^2 x / 8\pi \cdot c$$

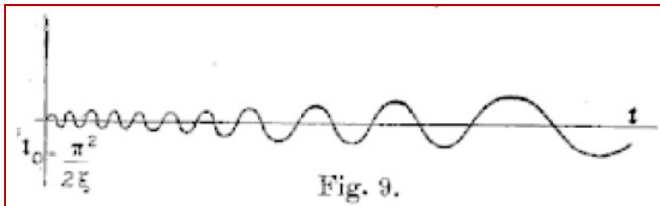


Fig. 9.

J_1 allmählich an, wie in der schematischen Fig. 9 angedeutet, wobei indessen im Auge zu behalten ist, daß

$$f(x,t) = \frac{2\pi}{\tau}\sqrt{\frac{\mathrm{t}}{\xi}}\, J_1(2\sqrt{\mathrm{t}\xi})$$

$$\mathrm{t} = t - x/c$$

Sommerfeld A 1914 Über die Fortpflanzung des Lichtes in dispergierenden Medien *Annalen der Physik* 44 177-202 (1914)

Light [electromagnetic radiation]: Wave and Particle.

[More than 50 Nobel Prize winners' research and results are explicitely related to 'photons'.]

Röntgen 1901
Lorentz, Zeeman 1902
Rayleigh 1904
Lenard 1905
Thomson JJ 1906
Michelson 1907
Lippmann 1908
Marconi, Braun 1909
Wien 1911
Laue 1914
Bragg WH, Bragg WL 1915
Barkla 1917
Planck 1918
Stark 1919
Einstein 1921
Bohr 1922
Millikan 1923
Siegbahn KMG 1924
Frank, Hertz 1925
Perrin 1926
Compton, CTR Wilson 1927
Richardson 1928
De Broglie 1929
Raman 1930
Heisenberg 1932
Schrödinger, Dirac 1933
Thomson GP, Davisson 1937
Fermi 1938
Stern 1943
Rabi 1944
Pauli 1945

WW II 1945

Laser 1960

Bloch, Purcell 1952
Zernike 1953
Born, Bothe 1954
Lamb, Kusch 1955
Cherenkov, Frank, Tamm 1958
Hofstadter, Mössbauer 1961
Landau 1962
Wigner, Göppert-Mayer, Jensen 1963
Townes, Prokhorov, Basov 1964
Tomonaga, Schwinger, Feynman 1965
Kasler 1966
Bethe 1967
Gabor 1971
Kapitsa, Penzias, Wilson 1978 ← CMB
Blombergen, Schawlow, Siegbahn KM 1981
Chandrashekar, Fowler 1983
Ramsey, Dehmelt, Paul 1989
Chu, Cohen.Tannoudji, Phillips 1997
Alferov, Kroemer, Kilby 2000
Cornell, Ketterle, Wieman 2001
Glauber, Hall, Hänsch 2005
Mather, Smoot 2006 ← CMB
Nambu, Kobayashi, Maskawa 2008
Kao, Boyle, Smith 2009
Haroche, Wineland 2012
Akasaki, Amano, Nakamura 2014
Ashkin, Mourou, Strickland 2018 ← CPA 2018

World Year of PHYSICS 2005

Laser 50: 2010

Laser Nobel: 2014

2015

INTERNATIONAL YEAR OF LIGHT 2015

The Nobel Prize in Physics 2018.
Arthur Ashkin, Gerard Mourou and Donna Strickland.

Volume 56, number 3 OPTICS COMMUNICATIONS 1 December 1985

COMPRESSION OF AMPLIFIED CHIRPED OPTICAL PULSES ☆

Donna STRICKLAND and Gerard MOUROU
Laboratory for Laser Energetics, University of Rochester, 250 East River Road, Rochester, NY 14623-1299, USA

Received 5 July 1985

We have demonstrated the amplification and subsequent recompression of optical chirped pulses. A system which produces 1.06 μm laser pulses with pulse widths of 2 ps and energies at the millijoule level is presented.

The onset of self-focusing of intense light pulses limits the amplification of ultra-short laser pulses. A similar problem arises in radar because of the need for short, yet energetic pulses, without having circuits capable of handling the required peak powers. The solution for radar transmission is to stretch the pulse by passing it through a positively dispersive delay line before amplifying and transmitting the pulse. The pulse would be free from gain saturation effects, because the frequency varies along the pulsewidth and each frequency component sees gain independently.

A schematic diagram of the amplifier and compression system is shown in fig. 1. A CW mode-locked, Nd : YAG laser (Spectra-Physics Series 3000) is used to produce 150 ps pulses at an 82 MHz repetition rate. Five watts of average power are coupled into 1.4 km

☆ This is a corrected version of the paper published in Optics Comm. 55 (1985) 447, where inadvertently a wrong figure was printed as fig. 1.

„The Nobel Prize in Physics 2018 was awarded “for groundbreaking inventions in the field of laser physics”with one half to **Arthur Ashkin “for the optical tweezers and their application to biological systems**”, the other half jointly to **Gérard Mourou and Donna Strickland** “**for their method of generating high-intensity, ultra-short optical pulses**” ."

Donna Strickland and Gerard Mourou, Compression of amplified chirped optical pulses. *Optics Communication* Volume 56, number 3, 219-221 (1985).

Chirped Pulse Amplification (CPA) demonstrated first by D. Strickland and G. Mourou. [The Nobel Prize in Physics 2018.]

Volume 56, number 3 OPTICS COMMUNICATIONS 1 December 1985

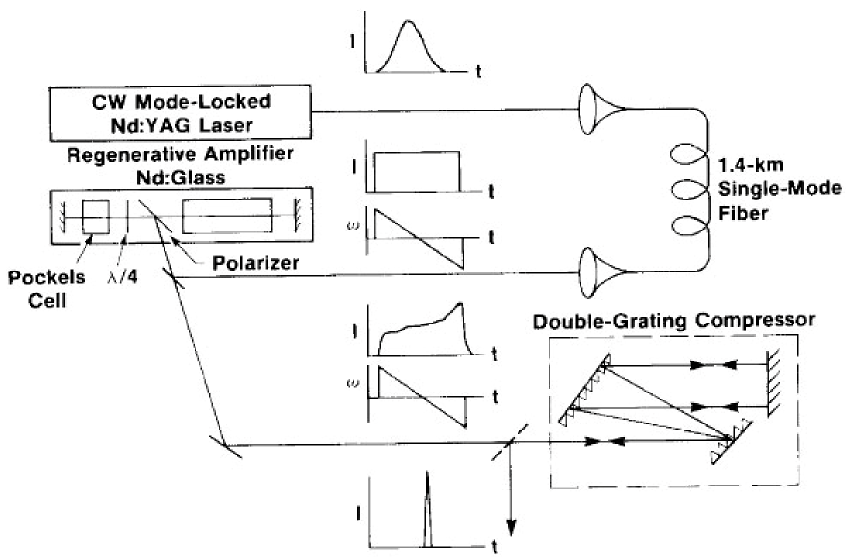


Fig. 1. Amplifier and compression system configuration.

The energy of the amplified pulse is ~2 mJ. The amplified pulse is transmitted through the AR coated window to a double pass of a double grating compressor. The gratings have 1700 ℓ/mm groove spacing

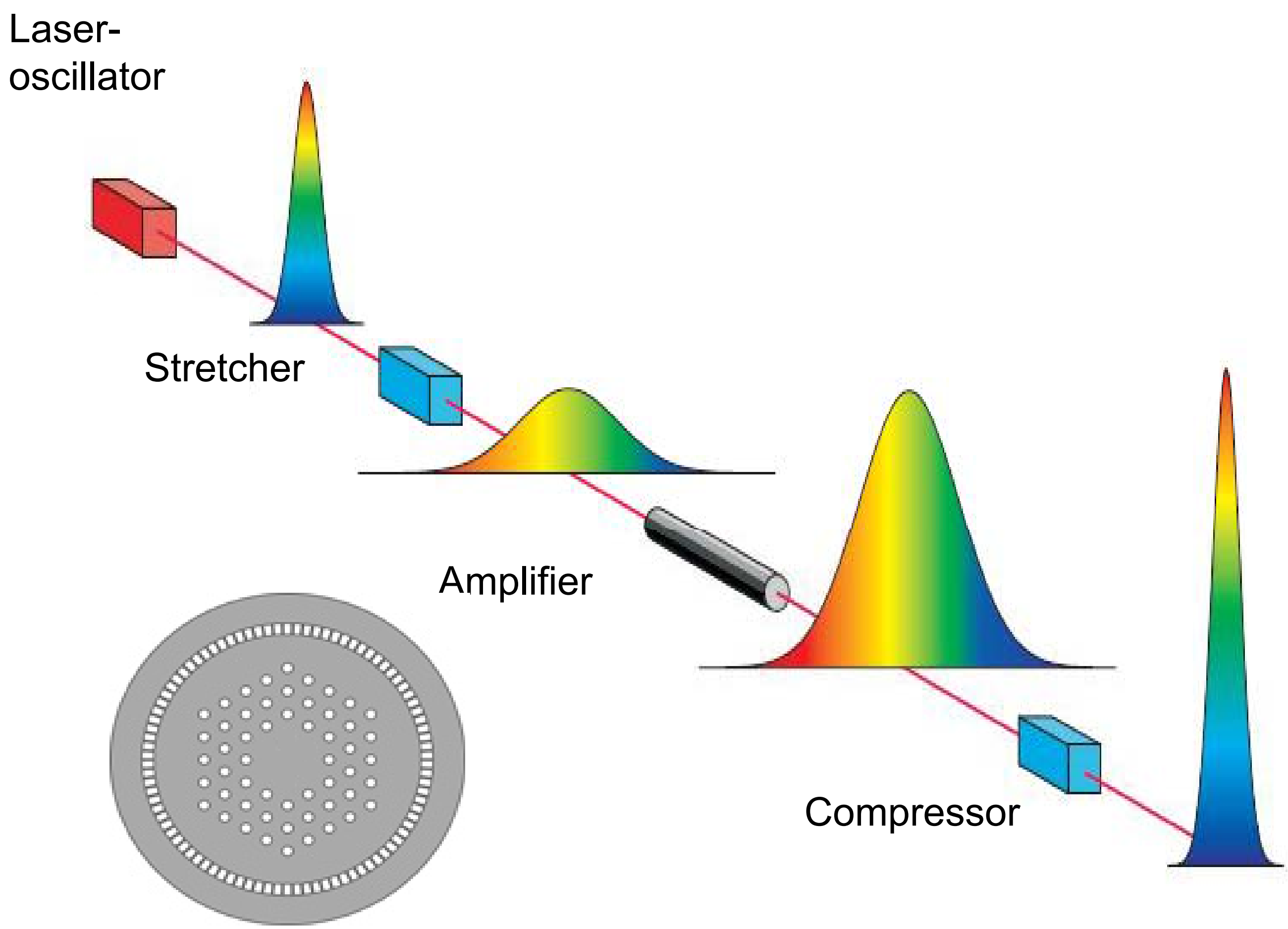
A double pass of the grating system was used to retain a circular beam profile [5]. The energy efficiency of the grating compressor is 50%. A pulsewidth of 1.5 ps was achieved as can be seen from the autocorre-

* This is a corrected version of the paper published in Optics Comm. 55 (1985) 447, where inadvertently a wrong figure was printed as fig. 1.

The Nobel Prize in Physics 2018 was awarded “for groundbreaking inventions in the field of laser physics” with one half to **Arthur Ashkin** **“for the optical tweezers and their application to biological systems”**, the other half jointly to **Gérard Mourou and Donna Strickland** **“for their method of generating high-intensity, ultra-short optical pulses”** ."

Donna Strickland and Gerard Mourou, Compression of amplified chirped optical pulses. *Optics Communication* Volume 56, number 3, 219-221 (1985).

D. Strickland and G. Mourou [1985]: ‘Chirped Pulse Amplification’ , ‘CPA’. [Temporal, spatial stretching.]



Schematic illustration of the ELI-ALPS facility.

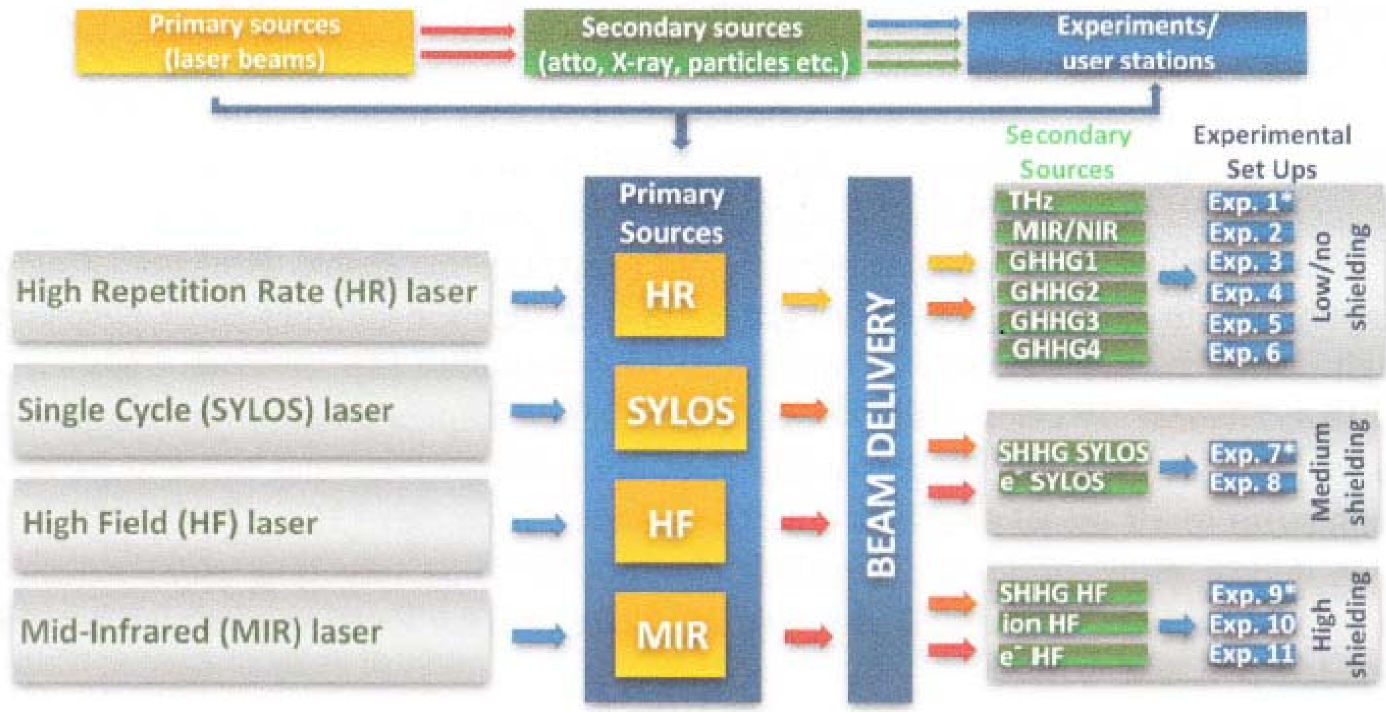


Fig. 10.1 Schematic illustration of the ELI-ALPS facility. Similar lay-outs are foreseen in the other two ELI-pillars

Figure copied from Charalambidis D, Chikán V, Cormier E, Dombi P, Fülöp J A, Janáky Cs, Kahaly S, Kalashnikov M, Kamperidis Ch, Kühn S, Lépine F, L'Huillier A, Lopez-Martens R, Mondal S, Osvay K, Óvári L, Rudawski P, Sansone G, Tzallas P, Várallyay Z and Varjú K, The Extreme Light Infrastructure – Attosecond Light Pulse Source (ELI-ALPS) Project. Chapter 10, pp 181-218. In Yamanouchi K, Hill III W. T and Paulus G P (Editors), Progress in ultraintense laser science XIII (Springer 2017)

The amplification is a ‘parametric process’. [HR laser system, first phase.]

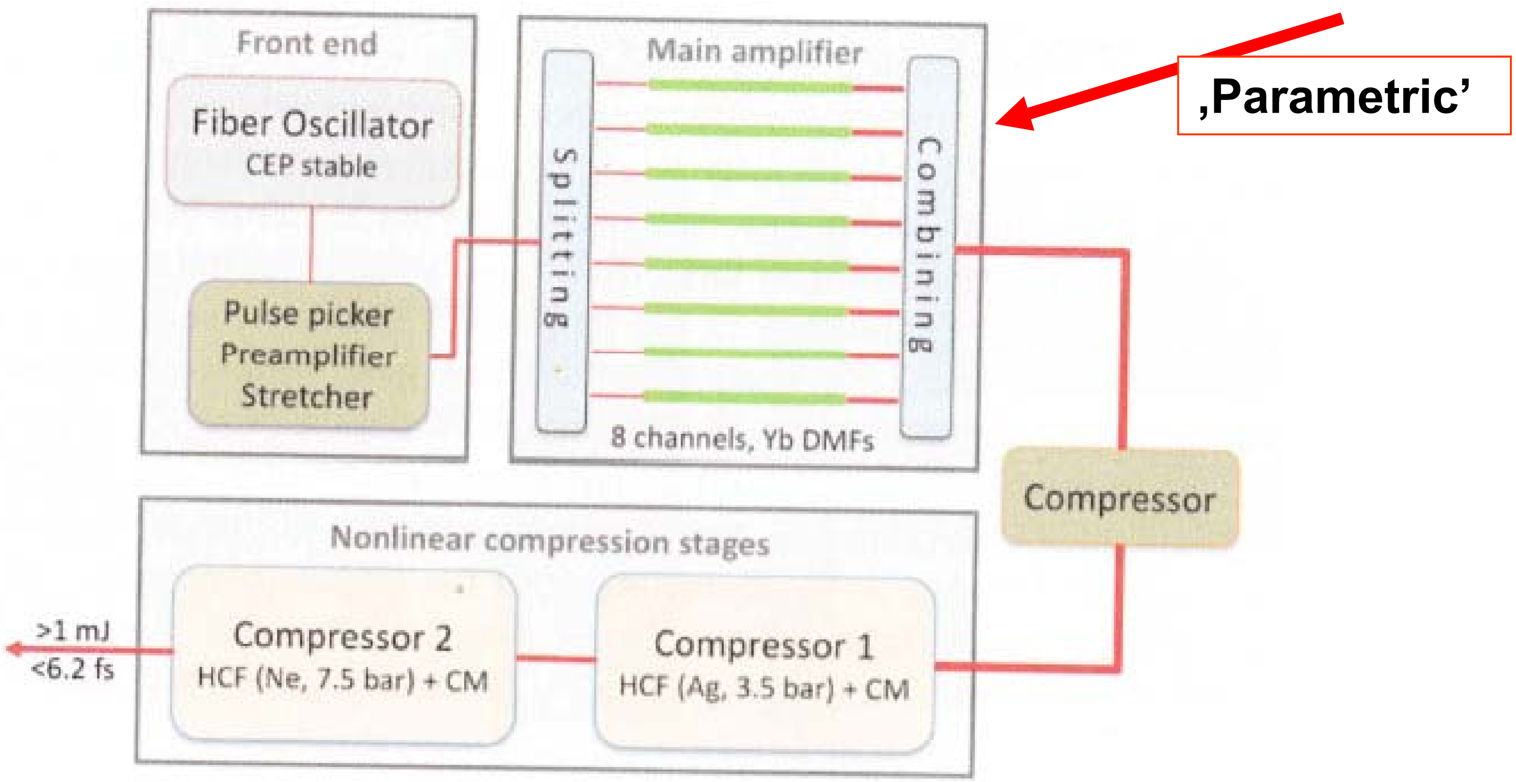


Fig. 10.2 Block diagram of the HR laser system for the first phase

Figure copied from Charalambidis D, Chikán V, Cormier E, Dombi P, Fülöp J A, Janáky Cs, Kahaly S, Kalashnikov M, Kamperidis Ch, Kühn S, Lépine F, L'Huillier A, Lopez-Martens R, Mondal S, Osvay K, Óvári L, Rudawski P, Sansone G, Tzallas P, Várallyay Z and Varjú K, The Extreme Light Infrastructure – Attosecond Light Pulse Source (ELI-ALPS) Project. Chapter 10, pp 181-218. In Yamanouchi K, Hill III W. T and Paulus G P (Editors), Progress in ultraintense laser science XIII (Springer 2017)

Development of very large intensity lasers based on the 'CPA technique'. [D. Strickland and G. Mourou. The Nobel Prize in Physics 2018.]

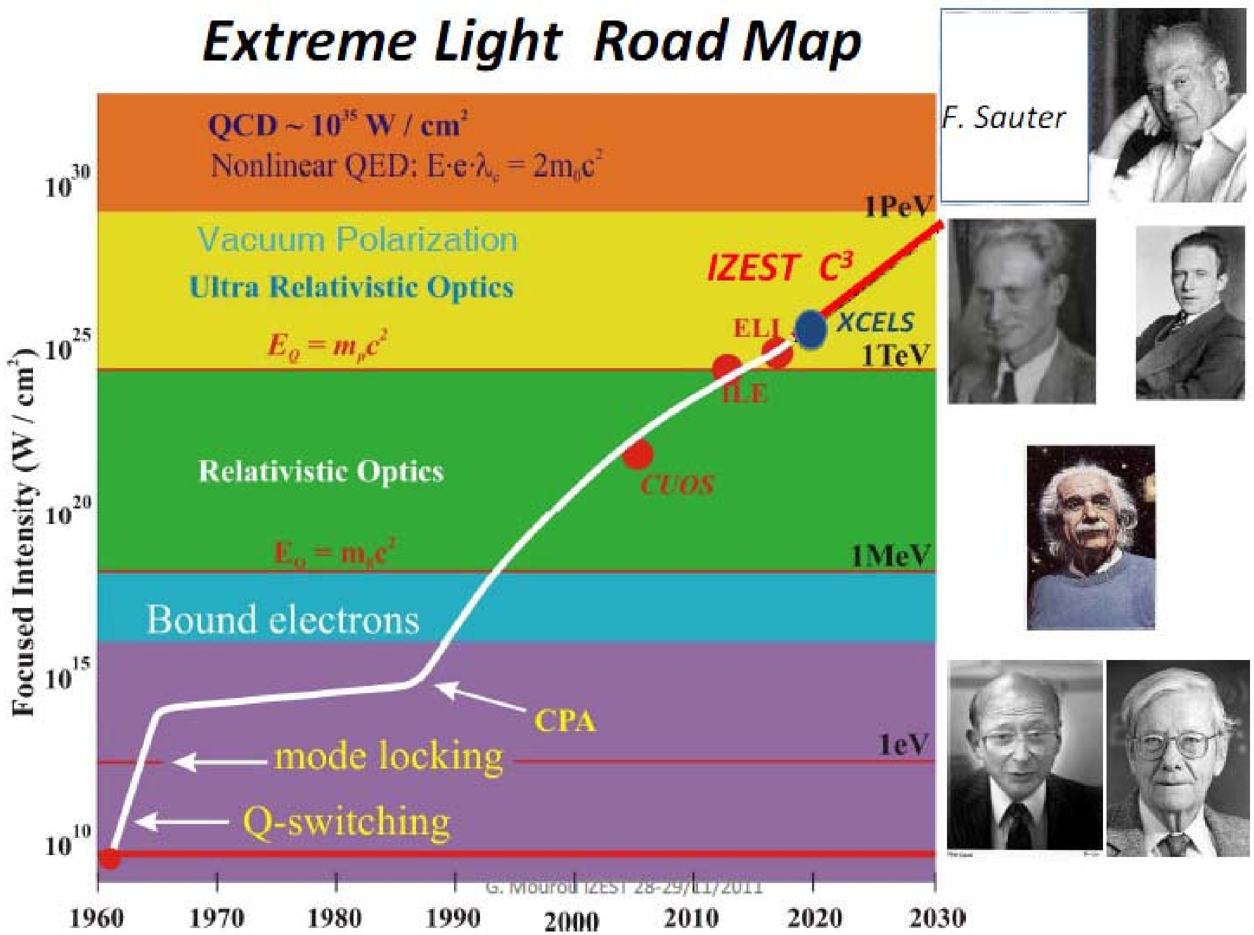


Figure taken from Gérard Mourou's presentation at 'IZEST' [International Zeta-Exawatt Science and Technology.] Launching Workshop, Ecole Polytechnique, 28-29 November, 2011. Paris, France.

Planck’s natural system of units (1899).

PLANCK'S 'NATURAL SYSTEM OF UNITS' [1899: before " *h* " !]

§ 25. Zahlenwerthe.

Die Werthe der universellen Constanten a und b lassen sich mit Hülfe der vorliegenden Messungen mit ziemlicher Annäherung berechnen.

Hr. F. Kurlbaum[2] hat gefunden, dass, wenn man mit S_t die gesammte Energie bezeichnet, die von 1^{qcm} eines auf t° Cels. befindlichen schwarzen Körpers in 1 Secunde in die Luft gestrahlt wird:

$$S_{100} - S_0 = 0.01763 \text{ gr. cal.}$$

Andererseits beträgt nach (52) die gesammte von der Flächeneinheit eines schwarzen Körpers in der Zeiteinheit nach allen Richtungen des Halbraumes ausgestrahlte Energie:

$$\int K \cos\vartheta \, d\Omega = K \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta = \pi K$$

$$= \frac{12\pi b \vartheta^4}{c^2 a^4} .$$

Folglich, wenn das mechanische Wärmeaequivalent zu $419 \cdot 10^5$ angenommen wird, im absoluten C.G.S.-Maasse:

$$\frac{12\pi b (373^4 - 273^4)}{c^2 a^4} = 0.01763 \cdot 419 \cdot 10^5$$

oder, da $c = 3 \cdot 10^{10}$:

$$\frac{b}{a^4} = 1.278 \cdot 10^{15} . \qquad (57)$$

M. Planck, Über irreversible Strahlungsvorgänge. 1– 2– 3 – 4 – 5. *Sitzungsber. der Preuß. Akad. der Wissenschaften* , (1897-1899). 6. *Annalen der Physik* (1900-1).

Planck's natural system of units (1889). Planck length, mass, time, temperature l_P, m_P, t_P, T_P .

Planck (1900)

$$u_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\cdot b\nu \cdot \mathrm{e}^{-\frac{a\nu}{T}}$$

$$h\nu >> kT$$

$$\overline{n} << 1$$

$$u_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\cdot h\nu \cdot \frac{1}{\mathrm{e}^{h\nu/kT}-1}$$

Recent notation and numerical values:

$$b \rightarrow h = 6.626\times 10^{-27}\, erg\cdot \mathrm{sec}$$

$$a \rightarrow h/k = 4.798\times 10^{-11}\, cm\cdot K$$

"…it would not be without interest to note, that, with the help of the constants *a* and *b* appearing in the expression (41) of the radiation entropy [Wien entropy derived by Planck using general considerations], there is a possibility given, to define units for length, mass, time and temperature, which, independently from special bodies or substances, keep their meaning for all times and for all, also extraterrestrial and non-human cultures, which then might be called »natural units of measure«.

Planck M, Über irreversible Strahlungsvorgänge. 5. Mitteilung. *Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften*. S. 449-476 (1898).

Planck's natural system of units (1889). Planck length, mass, time, temperature l_P, m_P, t_P, T_P .

"The mean to define the four units for length, mass, time and temperature is secured by the mentioned constants *a* and *b*, further, by the velocity of propagation of light *c* in vacuum, and by the gravitation constant *f*. Expressed in centimeters, gramms, seconds and degrees Celsius, the numerical values of these four constants are as follows:"

$$a = 0.4818 \cdot 10^{-10} [\mathrm{sec} \times \mathrm{Celsiusgrad}]$$

$$b = 6.885 \cdot 10^{-27} \left[\frac{\mathrm{cm}^2 \mathrm{gr}}{\mathrm{sec}}\right]$$

$$c = 3.00 \cdot 10^{10} \left[\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{sec}}\right]$$

$$f = 6.685 \cdot 10^{-8} \left[\frac{\mathrm{cm}^3}{\mathrm{gr} \cdot \mathrm{sec}^2}\right]$$

Recent values

$$a = 0.4798 \cdot 10^{-10} \ [\mathrm{sec} \cdot \mathrm{K}]$$

$$h = 6.626 \cdot 10^{-27} \left[\frac{\mathrm{cm}^2 \mathrm{gr}}{\mathrm{sec}}\right]$$

$$c = 299\ 792\ 458 \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}\right]$$

$$G = 6.6732 \cdot 10^{-8} \left[\frac{\mathrm{cm}^3}{\mathrm{gr} \cdot \mathrm{sec}^2}\right]$$

Planck M, Über irreversible Strahlungsvorgänge. 5. Mitteilung. *Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften*. S. 449-476 (1898). [Footnote: [1] F. Richardz und O. Krigar-Menzel, Anhang zu den Abhandlungen dieser Akademie vom Jahre 1898 S. 110, im Auszug: *Wied. Ann*. 66. S. 190, 1898.]

Planck's natural system of units (1889). Planck length, mass, time, temperature l_P, m_P, t_P, T_P .

"One now chooses the »natural units« so, that in the new system of measure all the four constants take the value 1, then one receives the quantities "

[modern definitions (with h-bar: h/2π !)]

as unit of length: $\sqrt{\frac{bf}{c^3}} = 4.13 \cdot 10^{-33}\,\mathrm{cm}$ $\qquad l_P = \sqrt{\hbar G / c^3} = 1.616 \times 10^{-35}\, m$

as unit of mass: $\sqrt{\frac{bc}{f}} = 5.56 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{gr}$ $\qquad m_P = \sqrt{\hbar c / G} = 2.176 \times 10^{-8}\, kg$

as unit of time: $\sqrt{\frac{bf}{c^5}} = 1.38 \cdot 10^{-43}\,\mathrm{sec}$ $\qquad t_P = l_P / c = 5.392 \times 10^{-44}\, s$

as unit of temperature: $a\sqrt{\frac{c^5}{bf}} = 3.50 \cdot 10^{32}\ \mathrm{°Cels}$ $\qquad T_P = m_P c^2 / k = 1.417 \times 10^{32}\, K$

"These quantities preserve their natural meaning as long as the laws of gravitation, propagation of light in vacuum and both of the two laws of heat theory remain valid, that is, being measured by most various intelligent beings using most different methods, they must always give the same value."

'The black hole war'. „Planck invents a better yardstick"

of the solar system, the Planck length would be no bigger than a virus. It is to Planck's everlasting credit that he realized that such impossibly tiny dimensions must play a basic role in any ultimate theory of the physical world. He didn't know what that role would be, but he might have guessed that the smallest building blocks of matter would be "Planck sized."

The unit of time that Planck required to make c, G, and h equal to one was also unimaginably small — namely 10^{-42} seconds, the time it takes light to travel one Planck length.

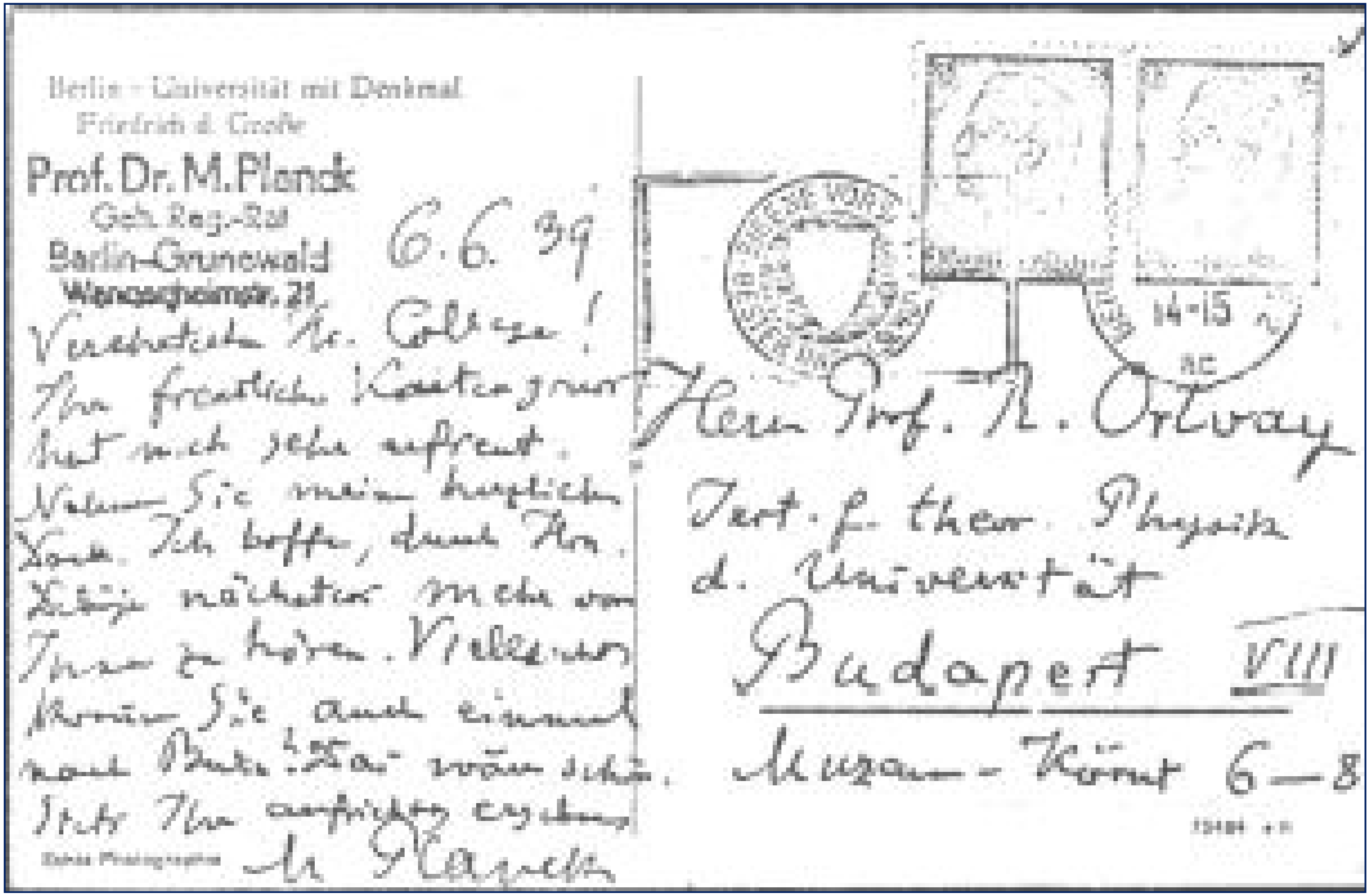
Finally, there is Planck's unit of mass. Given that the Planck length and the Planck time are so incredibly small (in ordinary, bio-friendly units), it would be natural to expect the Planck unit of mass to be much smaller than the mass of any ordinary object. But there you would be wrong. It turns out that the most basic unit of mass in physics is not terribly small on the biological scale: roughly the mass of ten million bacteria. It's about the same as the mass of the smallest object that can be seen with the naked eye — a dust mote, for example.

These units — the Planck length, time, and mass — have an extraordinary meaning: they are the size, half-life, and mass of the smallest possible black hole. We will return to this point in later

L. Susskind, *The Black Hole War* (Little, Brown and Company; New York - Boston - London, July 2008)

Planck in Hungary.

Planck in Hungary [1939].



Berlin – Universität mit Denkmal
Friedrich d. Große

Prof. Dr. M. Planck
Geh. Reg.-Rat
Berlin-Grunewald
Wangenheimstr. 21

6.6.39

Verehrter Hr. College!
Ihr freundlicher Kartengruss hat mich sehr erfreut. Nehmen Sie meinen herzlichen Dank. Ich hoffe, durch Ihre Schüler nächstens mehr von Ihnen zu hören. Vielleicht kommen Sie auch einmal nach Berlin. Das wäre schön.
Stets Ihr aufrichtig ergebener
M. Planck

Herrn Prof. R. Ortvay
Inst. f. theor. Physik
d. Universität
Budapest VIII
Muzeum-Körut 6–8

Planck's postcard to his host, Rudolf Ortvay.
copied from: Györgyi G, Max Planck Magyarországon. Fizikai Szemle 1972/10. 307.o..

26 April 1940. Max Planck was elected to an honorary member of the Hungarian Academy of Sciences

A Magyar Tudományos Akadémia Max Planckot 1940. április 26-án választotta meg külső taggá 41 szóval 1 ellenében (Akadémiai értesítő, 1940. 17. o.).

A III. osztályba külső tagnak ajánlották: Pogány Béla r. tag, Rybár István r. tag, Hoór-Tempis Mór r. tag, Ortvay Rudolf l. tag és Bay Zoltán l. tag.

"*A M. T. Akadémia III. osztályába* külső *tagnak tisztelettel ajánljuk* PLANCK MIKSA *titkos tanácsost, a berlini egyetem kiérdemesült tanárát, a porosz Tudományos Akadémia évek során volt titkárát, a Kaiser Wilhelm Institut volt elnökét, a fizikai Nobel-díj nyertesét, számos tudományos társaság tagját, német állampolgárt. Planck régebbi munkássága főképp a thermodinamikára vonatkozik melyet számos mélyreható eredménnyel gazdagított. Így Gibbs gondolata csak Planck vizsgálatai segélyével váltak a tudományos világ közkincsévé. Felemlíthetjük a Galván-elemek thermodinamikájára vonatkozó fontos vizsgálatait, valamint a relativisztikus mechanikára vonatkozó mélyenjáró fejtegetéseit. Thermodinamikai vizsgálatai vezették a múlt század kilencvenes éveiben az ún. fekete test sugárzásának problémájára. E problémát egy alapvető és annakidején igen idegenszerű gondolat: az energia-, ill. hatáskvantum fogalmának bevezetésével oldotta meg, és evvel egy oly gondolatot vezetett be a fizikába, mely azt a lefolyt 40 év alatt mélyrehatóan átalakította, a mai atomelméletet lehetővé tette, és ma is a fizika alapjaira vonatkozó minden kutatás alapja. Planck Miksa ma a tudományos világköztiszteletben álló egyik legnagyobb tekintélye, és mivel hazánk ügye iránt érdeklődik és Budapesten néhány év előtt előadást is tartott, helyesnek tartanók, ha Akadémiánk is kifejezné hódolatát Planck Miksa iránt és megtisztelné önmagát avval, hogy külső tagjai sorába iktatná."* (Magyar Tudományos Akadémia. Tagajánlások 1940-ben. Bp. 1940 81. o.)

Source: Györgyi G, Max Planck Magyarországon. Fizikai Szemle 1972/10. 307.o.

‘PLANCK 2008’ at the Hungarian Academy of Sciences.

A FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYA ÉS AZ
EÖTVÖS LORÁND FIZIKAI TÁRSULAT
EGYÜTTES TUDOMÁNYOS ÜLÉSE
május 14. (szerda) 10 óra
PLANCK 2008. **Emlékülés Max Planck születésének 150. évfordulója alkalmából**
Az ülést megnyitja és bevezetőt mond:
Introduction: *Kroó Norbert, az MTA rendes tagja, az MTA alelnöke*
A kvantumelmélet kialakulása Planck-tól Dirac-ig [The genesis of quantum theory from Planck to Dirac] ***Nagy Károly****, az MTA rendes tagja*
A kozmikus háttérsugárzás kutatásának története és kilátásai [History and perspectives of the research on cosmic microwave backgroud radiation]
Király Péter*, tudományos munkatárs*
Entrópia, Planck, Univerzum [Entropy, Planck, Universe]
Patkós András*, az MTA rendes tagja*
Max Planck kétségei [The doubts of Max Planck]
Károlyházy Frigyes*, a fizikai tudomány doktora*
Planck és a speciális relativitáselmélet [Planck and the special relativity theory]
Varró Sándor*, az MTA doktora*
A kvantummechanika kiteljesedése: a kvantum szóráselmélet megszületése [The birth of the quantum scattering theory]
Bencze Gyula*, a fizikai tudomány doktora*
Kvantum és klasszikus határán [At the border of classical and quantum]
Geszti Tamás*, a fizikai tudomány doktora*
Zárszó: Closing: ***Horváth Zalán****, az MTA rendes tagja, osztályelnök*
*Az ülés helye:*Magyar Tudományos Akadémia, Nagyterem (Budapest V., Roosevelt tér 9. II. em.)

Works by Planck concerning the relativity

- The foundation of the relativistic dynamics.
- The exact derivation of the velocity-dependent mass-increase. The detailed comparison with the experiments by Kaufmann.
- The relativistic generalization of the Principle of Least Action due to Helmholtz.
- The foundation of the relativistic thermodynamics (within this; the determination of the transformation rules of the black-body radiation).
- The general derivation of the famous " $E=mc^2$ " relation
- The relativistic generalization of the phase-space quantization introduced originally by him. The introduction of the relativistic phase-space cells. Statements on the relativistic fine-structure of the spectrum of the H-atom.

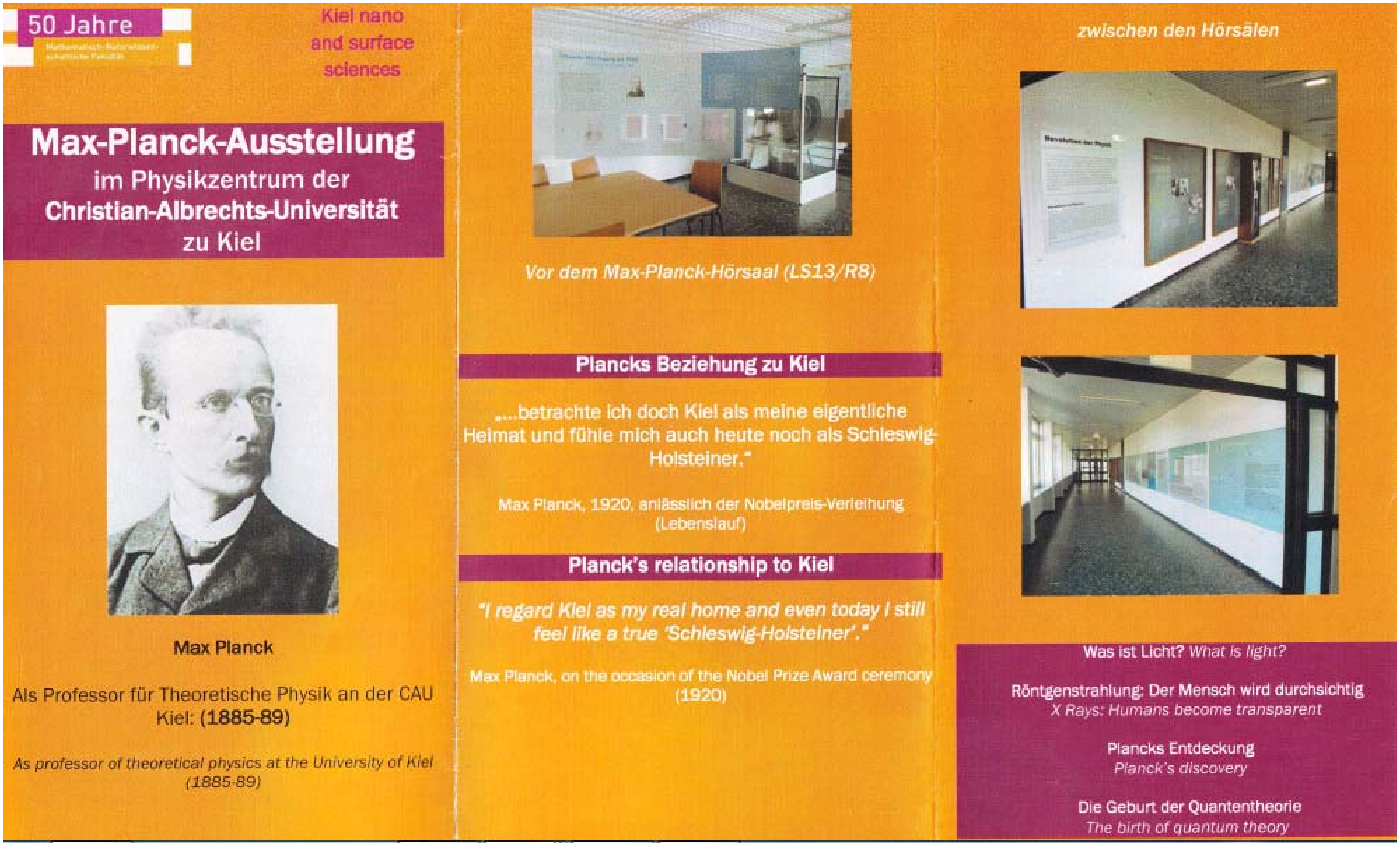
Einstein A (1905-) : "Zur Elektrodynamik bewegter Körper."...

Planck M (1906-) : "Das Pinzip der Relativität und die Grundgleichungen der Mechanik."...

"Planck – in a way charateristic to the truly great scentists – immediately realized the potentials for further develoments, and then on, Einstein and Planck, but also Lorentz enriched the relativity theory with newer and newer results, by the end of its completion. As a curiosity we note that in the development of the relativity theory – by the appearance of Minkowski's mentioned four-dimensional formulation, i.e. by 1908 – perhaps Planck was the leading personality, similar to that Einstein played the leading role in developing Planck's quantum theory.."

Simonyi Károly: A fizika kultúrtörténete (1978)

Max-Planck-Ausstellung im Physikzentrum der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel. [M Bonitz]


50 Jahre

Kiel nano and surface sciences

Max-Planck-Ausstellung
im Physikzentrum der
Christian-Albrechts-Universität
zu Kiel

Max Planck

Als Professor für Theoretische Physik an der CAU Kiel: **(1885-89)**

As professor of theoretical physics at the University of Kiel (1885-89)

Vor dem Max-Planck-Hörsaal (LS13/R8)

Plancks Beziehung zu Kiel

„...betrachte ich doch Kiel als meine eigentliche Heimat und fühle mich auch heute noch als Schleswig-Holsteiner."

Max Planck, 1920, anlässlich der Nobelpreis-Verleihung (Lebenslauf)

Planck's relationship to Kiel

"I regard Kiel as my real home and even today I still feel like a true 'Schleswig-Holsteiner'."

Max Planck, on the occasion of the Nobel Prize Award ceremony (1920)

zwischen den Hörsälen

Was ist Licht? *What is light?*

Röntgenstrahlung: Der Mensch wird durchsichtig
X Rays: Humans become transparent

Plancks Entdeckung
Planck's discovery

Die Geburt der Quantentheorie
The birth of quantum theory

Exhibition compiled and organized by Prof. Dr. M. Bonitz at the Kiel Univiersity.

Planck's method of quantization on phase-space.

Planck, „The physical structure of phase-space.” [1915-16]

2. *Die physikalische Struktur des Phasenraumes;* *von Max Planck.*

(Bearbeitet nach zwei Mitteilungen in der Deutschen Physikalischen Gesellschaft, Sitzung vom 5. November und vom 3. Dezember 1915, Verhandlungen p. 407 und p. 438, 1915, und einer Mitteilung in der Kgl. Preußischen Akademie der Wissenschaften, Sitzung vom 16. Dezember 1915. Berichte p. 909.)

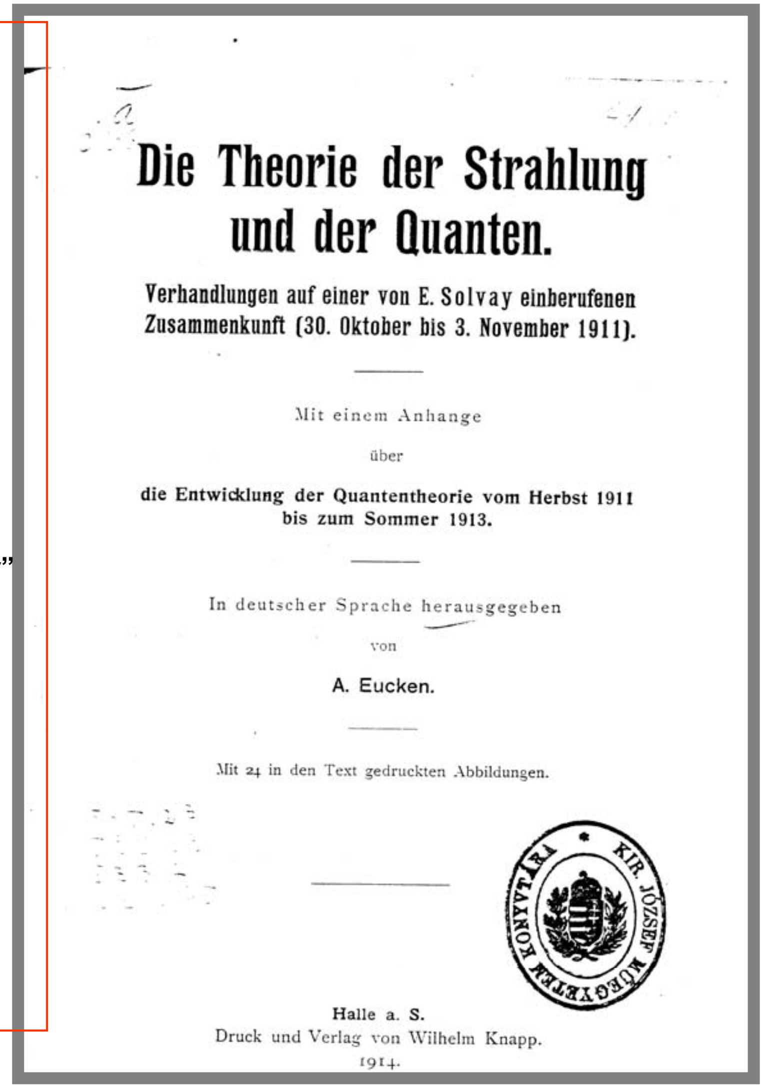
§ 1.

Seitdem auf der Tagung des ersten Solvaykongresses in Brüssel H. Poincaré der damals noch sehr jugendlichen Quantenhypothese die verfängliche Frage entgegenhielt[1]), nach welchem Verfahren man denn bei einem System mit mehreren Freiheitsgraden die Teilung nach Quanten vornehmen müsse, hat diese Frage eins der schwierigsten Hindernisse für die weitere Entwicklung der Theorie gebildet. Heute glaube ich eine Antwort von einigermaßen allgemeiner Bedeutung darauf geben zu können, und möchte dieselbe, in teilweiser Neu-

Planck M 1916 Die physikalische Struktur des Phasenraumes. *Annalen der Physik* 50, 358- (1916).

The 1st Solvay Congress (1911).

H. A. Lorentz (Leiden) : Ekvipartíció sugárzásra
W. Nernst (Berlin) : A kvantumelmélet alkalmazása a fajhőre
M. Planck (Berlin) : “Második elmélet”, zérusponti energia, a fásistér kvantálása
H. Rubens (Berlin) : A Planck-formula kísérleti bizonyítékai
A. Sommerfeld (München) : A hatáskvantum jelentősége nem-periodikus folyamatokra
W. Wien (Würzburg)
E. Warburg (Charlottenburg) : A Planck-formula kísérleti bizonyítékai
J. H. Jeans (Cambridge) : Kinetikus elmélet, aktív és passzív szabadsági fokok, fajhő
E. Rutherford (Manchester)
M. Brillouin (Paris)
Madame Curie (Paris)
P. Langevin (Paris) : A mágnesség kinetikus elmélete, “Langevin-függvény”
J. Perrin (Paris) : A molekulák létezése, Brown-mozgás stb. kísérleti eredmények
H. Poincaré (Paris)
A. Einstein (Prag) : A fajhő kvantumelmélete, molekulák rotációjának kvantálása
F. Hasenörl (Wien)
H. Kamerling-Onnes (Leiden) : Elektromos vezetőképesség alacsony hőmérsékleten
J. D. van der Waals (Amsterdam)
M. Knudsen (Kopenhagen) : Kinetikus elmélet, belső súrlódás, diffúzió, hővezetés


Die Theorie der Strahlung und der Quanten.

Verhandlungen auf einer von E. Solvay einberufenen Zusammenkunft (30. Oktober bis 3. November 1911).

Mit einem Anhange

über

die Entwicklung der Quantentheorie vom Herbst 1911 bis zum Sommer 1913.

In deutscher Sprache herausgegeben

von

A. Eucken.

Mit 24 in den Text gedruckten Abbildungen.

Halle a. S.
Druck und Verlag von Wilhelm Knapp.
1914.

Planck, „The physical structure of phase-space.” [1915-16]

Inzwischen hat Hr. A. Sommerfeld [2]), ausgehend von dem Problem der Spektrallinien, ganz den nämlichen Weg beschritten, und auf ihm bereits so außerordentlich bemerkenswerte Resultate erzielt, daß man wohl schon jetzt von einer direkten Bestätigung

---

1) La Théorie du Rayonnement et les Quanta. Paris, Gauthier-Villars, 1912, p. 120.

2) A. Sommerfeld, Sitzungsber. d. kgl. bayr. Akad. d. Wiss. vom 4. Dezember 1915 und vom 8. Januar 1916. Der Hauptunterschied der Sommerfeldschen Betrachtungsweise von der meinigen liegt wohl darin, daß Hr. Sommerfeld von zeitlich periodischen oder quasiperiodischen Bahnen ausgeht, während bei mir der Phasenraum als solcher, unabhängig von der Zeit, betrachtet wird. Die Unterscheidung zwischen kohärenten und inkohärenten Freiheitsgraden (§ 7) findet sich bei Hrn. Sommerfeld nicht, wohl weil dort nur inkohärente Freiheitsgrade behandelt werden.

Planck M 1916 Die physikalische Struktur des Phasenraumes. *Annalen der Physik* 50, 358- (1916).

ATOMBAU UND SPEKTRALLINIEN [1916 – 21]

1916. № 17.

ANNALEN DER PHYSIK.
VIERTE FOLGE. BAND 51.

1. *Zur Quantentheorie der Spektrallinien;*
von A. Sommerfeld.

1916. № 18.

ANNALEN DER PHYSIK.
VIERTE FOLGE. BAND 51.

1. *Zur Quantentheorie der Spektrallinien;*
von A. Sommerfeld.

(Fortsetzung von p. 94).

III. Theorie der Röntgenspektren.

§ 1. Allgemeines über die K- und L-Serie.

Wir stützen uns auf folgende bekannte Tatsachen:

1. Die stärkste Linie der K-Serie, die K_α-Linie, beobachtet von $Z = 11$ bis $Z = 60$ durch Moseley[1]), Siegbahn u. a. (Z = Ordnungszahl der Elemente im natürlichen System, gewöhnlich mit N bezeichnet, welchen Buchstaben wir jedoch für die Rydbergfrequenz reservieren wollen), wird nach Moseley dargestellt durch die Formel

$$\nu = N(Z-1)^2\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right). \tag{1}$$

Der Faktor $\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} = \frac{3}{4}$

ergibt sich nach Rydberg[2]) mit einer Genauigkeit größer als 1 Prom.

Die Moseleysche Formel (1) ist sehr geeignet für die in diesem Paragraphen beabsichtigte allgemeine Übersicht; ...len sich indessen verschiedene Zweifel (be... ...ladung" $Z - 1$) und Verbesserungen (Hinzu... ...vitätskorrektion) ergeben.

...ie ist nach weicheren Strahlen hin von einer ... begleitet, die wir $K_{\alpha'}$ nennen werden. Der ...nd $K_{\alpha'}$ ist durch Malmer[3]) zwischen $Z = 35$ und $Z = 60$ gemessen. Die Messungen sind kontrolliert von Siegbahn und Stenström[4]) sowie von Siegbahn und Friman.[5])

$$\oint p_i dq_i = n_i h$$

1) H. Moseley, Phil. Mag. **26**. p. 1024; **27**. p. 703.
2) J. R. Rydberg, Phil. Mag. August 1914. p. 148.
3) I. Malmer, Diss. Lund 1915.
4) M. Siegbahn und W. Stenström, Physik. Zeitschr. **17**. p. 48 und p. 318. 1916. Die letztgenannte Arbeit konnte hier nicht mehr berücksichtigt werden.
5) M. Siegbahn u. E. Friman, Ann. d. Phys. **49**. p. 611. 1916.

Planck, „The physical structure of phase-space."
[1915-16]

In jedem Falle müssen wir dem Phasenraum eine gewisse *physikalische Struktur* beilegen, welche der klassischen Dynamik durchaus fremd ist, ohne ihr notwendig zu widersprechen, und wir werden dies dadurch zum Ausdruck bringen, daß wir den Phasenraum durch mehrere Scharen von bestimmten Hyperflächen $(2f-1)$. Grades:

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{lllll} g=0, & g=g_1, & g=g_2, & \ldots\; g=g_n, & \ldots \\ g'=0, & g'=g_1', & g'=g_2', & \ldots\; g'=g'_{n'}, & \ldots \\ g''=0, & g''=g_1'', & g''=g_2'', & \ldots\; g''=g''_{n''}, & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}\right.$$

in einzelne Zellen, die „Elementargebiete der Wahrscheinlichkeit", zerlegen. Hierbei bedeuten g, g', g'', ... gewisse Funktionen der Koordinaten und Impulse, und g_1, g_2, ... bestimmte Konstante, nämlich:

$$(1\,a)\qquad g_n = n\,h, \quad g'_{n'} = n'h, \quad g''_{n''} = n''h, \quad \ldots$$

(h ist das elementare Wirkungsquantum).

Planck M 1916 Die physikalische Struktur des Phasenraumes. *Annalen der Physik* 50, 358- (1916).

Sommerfeld on Planck's method [1916].

und p, als man Freiheitsgrade des Systems hat. Indem man die Elemente $\Pi\,(dq\,dp)$ des Phasenraumes betrachtet, operiert man von Anfang an mit kontinuierlichen Wahrscheinlichkeiten. Die Quantentheorie ersetzt diese durch diskrete Wahrscheinlichkeiten und betrachtet statt des Phasenelementes $dq\,dp$ als Elementarbereich der Wahrscheinlichkeit, nach Planck[1]) ein Phasenintegral von endlicher Ausdehnung. Im Falle des linearen Oszillators der Strahlungstheorie (ein Freiheitsgrad) handelt es sich um ein zweifach ausgedehntes Integral in der Phasenebene (q, p):

$$\int dq\,dp = h;$$

im Falle allgemeinerer Mechanismen von f Freiheitsgraden würde an dessen Stelle zunächst das $2f$-fach ausgedehnte Integral über den Phasenraum der (q_i, p_i) treten:

$$\text{(a)} \qquad \int_{i=1}^{i=f} \Pi\,(dq_i\,dp_i) = h^f.$$

In der Tat bildet dieses Integral den Ausgangspunkt der in der Einleitung genannten neuesten Arbeiten von Planck.

1) Vgl. z. B. Solvay-Kongreß I, p. 99 der französischen Ausgabe.

Sommerfeld 1916

Schwarzschild K, „Zur Quantenhypothese.”
[Phase-space quanization with action-angle variables, 1916. Also: Epstein 1916.]

Zur Quantenhypothese.

Von K. Schwarzschild.

(Vorgelegt am 30. März 1916 [s. oben S. 435].)

I.

§ 1. Die Quantenhypothese ist neuerdings von den HH. Planck[1] und Sommerfeld[2] auf den Fall mechanischer Systeme von mehreren Freiheitsgraden erweitert worden. Das Problem besteht darin, Prinzipien für die Einteilung des Phasenraumes in Elementargebieten anzugeben. Ich möchte hier zeigen, daß für eine wichtige Gruppe mechanischer Probleme eine Einteilung des Phasenraumes in übersichtlicher Weise erfolgen kann, indem man von kanonischen Variablen bestimmter Art Gebrauch macht. Die Einteilung deckt sich in vielen, aber nicht in

Schwarzschild K, Zur Quantenhypothese. *Sitzungsber. der kgl. preußischen Akad. der Wiss*. S. 548-568 (1916).

Kneser H, „The general quantum condition (prescription) by Planck [1916].”

Untersuchungen zur Quantentheorie.

Von

Hellmuth Kneser in Göttingen.

Einleitung.

Bei der quantentheoretischen Behandlung mechanischer Probleme wird die Gesamtheit der bei verschiedener Wahl der Anfangsbedingungen mechanisch möglichen Bewegungen in bestimmter Weise eingeteilt in „Elementargebiete der Wahrscheinlichkeit“. Die auf den Grenzen dieser Gebiete verlaufenden Bewegungen gelten als „statistisch ausgezeichnet“. Auf welche Weise diese Einteilung vorzunehmen ist, darüber geben die *Quantenvorschriften* Auskunft, die von verschiedenen Forschern in verschiedenen Fassungen aufgestellt werden. Es drängen sich dabei die folgenden Fragen

II. Allgemeine Quantenvorschrift. Eindeutige Integrale.

§ 7.

Die allgemeine Quantenvorschrift von Planck.

Planck hat[5]) eine Quantenvorschrift angegeben, die sehr allgemein gehalten ist und von gar keiner besonderen Eigenschaft des mechanischen Systems Gebrauch macht. Sie lautet:

Kneser H, Untersuchungen zur Quantentheorie. *Mathematische Annalen*. 84, 277-302 (1921).

Sommerfeld on Planck’s method [1916].

punktes für ein System von f Freiheitsgraden so bezeichnen: Planck teilt den $2f$-dimensionalen Phasenraum in Zellen vom Rauminhalte h^f (vgl. Gl. (a) in § 1) und bestimmt die Gestalt der Zellen für jedes System durch besondere Betrachtungen. Wir behaupten, daß die Zelle f-fach zylindrisch ist, daß sie nämlich, auf jede der (geeignet gewählten) Koordinatenebenen (q, p) projiziert, den Flächeninhalt h ergibt (vgl. Gl. (b) in § 1); man kann die Zelle konstruieren, indem man über jedem dieser Flächeninhalte h als Basis je einen geraden Zylinder errichtet und diese f Zylinder zum Schnitt bringt.

Sommerfeld 1916

„EBK quantization” [1985].

SIAM REVIEW
Vol. 27, No. 4, December 1985

SEMICLASSICAL MECHANICS*

JOSEPH B. KELLER†

Abstract. Classical mechanics and the quantum conditions of Planck, Bohr, Sommerfeld, Wilson and Einstein are presented. The virtues and defects of this "old quantum theory" are pointed out. Its replacement

In 1900, Max Planck proposed that for a harmonic oscillator representing a degree of freedom of a radiation field, this classical result does not hold. Instead for such an oscillator, E can take only one of the particular values

$$E_n = nh\nu, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots. \tag{2.4}$$

Here $h = 6.54 \times 10^{-27}$ erg sec is a new constant, now called Planck's constant, and ν is the frequency of the oscillator, which is called a quantized oscillator. By making this assumption, he was able to deduce the law of black body radiation, which agreed with observation and which had not been derived in any other way. In 1907 Einstein used Planck's proposal to account for the low temperature behavior of the specific heat of a solid, which he represented as a collection of quantized harmonic oscillators.

Keller J B, Semiclassical mechanics. *SIAM Review*. 27(4) Dec. (1985).

„EBK quantization „ [1985].

Now we can use this result, together with (6.3) for S, to write the quantum condition (5.6) as follows:

$$\oint \sum_{i=1}^{N} p_i dq_i = \left(n + \frac{m}{4}\right) h. \qquad (6.7)$$

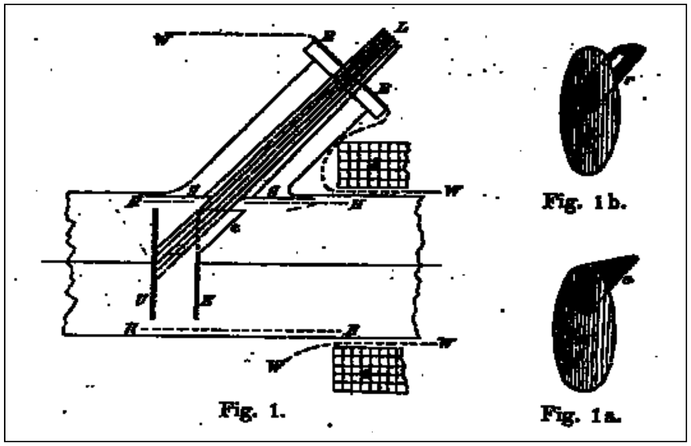
We obtain one such quantum condition for each basis curve, with an arbitrary integer n for each curve. The integer m, however, is determined by the basis curve in the manner described above.

When we omit the term in m from (6.7), it becomes the invariant form of the quantum conditions proposed by Einstein [5] in 1917[1]. For this reason, and because of the contributions of Brillouin and the author to its derivation, (6.7) is called the Einstein–Brillouin–Keller quantum condition, and its use is called EBK quantization.

Keller J B, Semiclassical mechanics. *SIAM Review*. 27(4) Dec. (1985).

Planck on energy fluctuations of the radiation field. ‘Wave-particle duality’.

Einstein's 'heuristic viewpoint' on light quanta (1905).Interpretation of Lenard's experimental results on the photoelectric effect (1902).



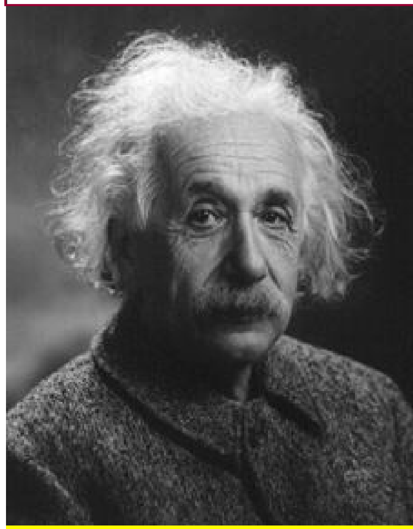
„...The usual notion that the energy of light would be distributed continuously in the illuminated space where it propagates finds particularly great difficulties by the attempt to explain the photoelectric phenomena, as has been shown in a path-breaking work of Mr. Lenard.[1])" [*Footnote*: „[1]) P. Lenard, Ann. d. Phys. 8. p. 169 u. 170. 1902."].

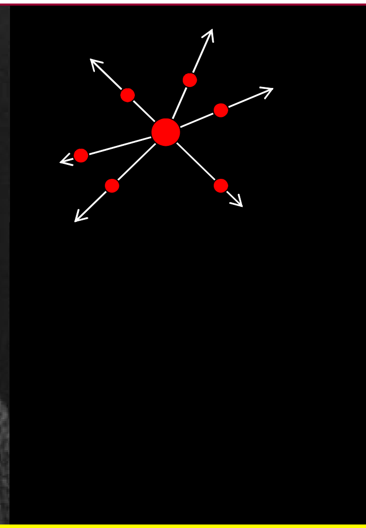
"...The simplest way to imagine this, that one light quantum gives its whole energy to a single electron;...Our interpretation, as far as I see, is not in contradiction of the properties of the photoelectric effect observed by Mr. Lenard. When each energy quantum of the exciting light gives its energy to the electrons independently from the others,...,the number of the electrons leaving the body, under otherwise the same circumstances, will be proportional with the intensity. [1]) "

$$h\nu - A = \frac{1}{2} m \upsilon^2$$

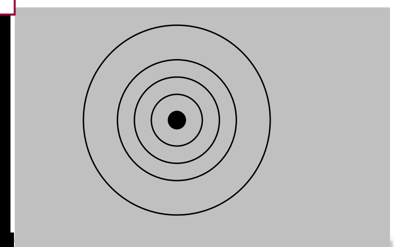
Einstein A, Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt. *Ann. der Phys.* 17 , 132-148 (1905). [Nobel Prize 1922]
Lenard P, Ueber die lichtelektrische Wirkung. *Ann. der Phys*. 8 , 149-198 (1902). [Nobel Prize 1905]

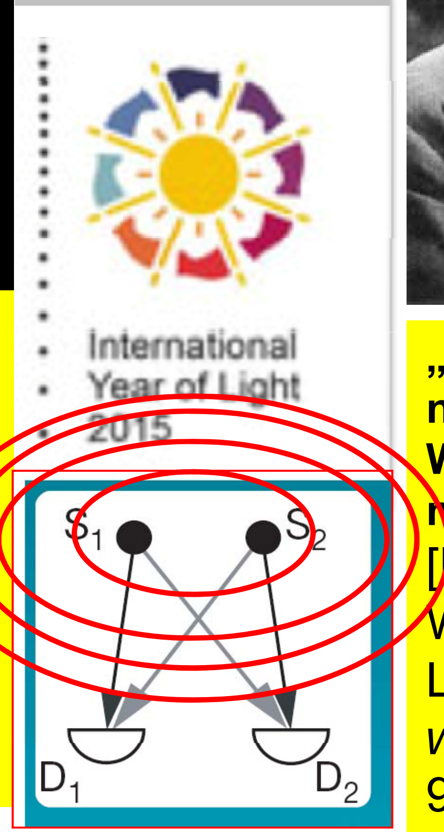
6. Über einen
die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes
betreffenden heuristischen Gesichtspunkt;
von A. Einstein.

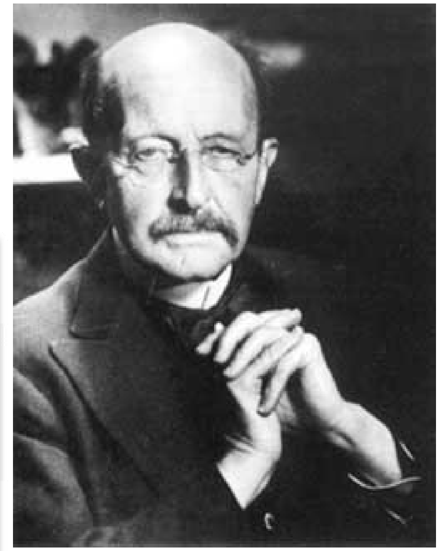




What would PLANCK and EINSTEIN say on the logo of the 'International Year of Light 2015?







"...by spreading from a point in the outgoing light rays the energy is not distributed continuously to larger and larger spatial regions, but these rays consist of a finite number of energy quanta localized in spatial points ..." [Einstein A, On a heuristic viewpoint concerning the production and transformation of light. *Annalen der Physik* (4) **17**, 132-148 (1905)]

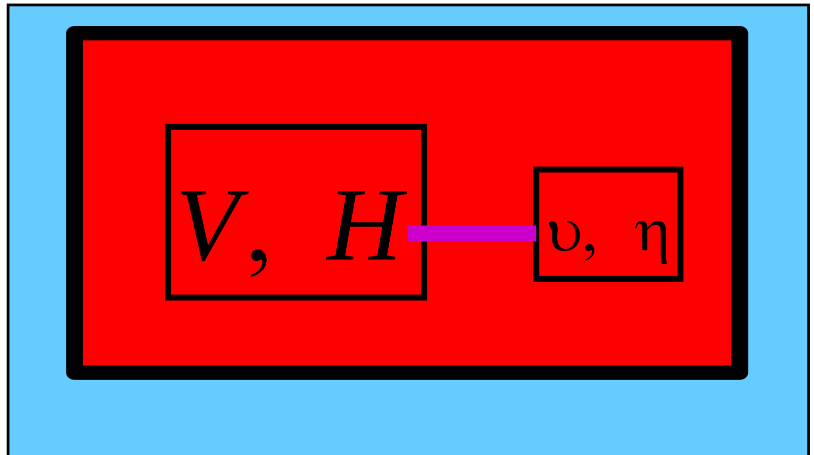
„The wavefront is not spotty." ["Die Wellenfront ist nicht fleckig."] [Planck M, Das Wesen des Lichts. *Natur-wissenschaften* **7**, 903-909 (1919)]

Einstein‘s fluctuation formula (1909), “Zum gegenwärtigen Stand des Strahlungsproblems” [presented at the „Salzburg Meeting”]

Put two thermodynamically communicating boxes, V and v, into a Hohlraum filled with thermal radiation, their energies are H és η, resp. After equilibrium sets in, due to homogenity we have $H_0:\eta_0=V:v$. $S=\Sigma+\sigma$. Energy: $\eta=\eta_0+\varepsilon$, where ε random deviation from η_0. Entropy: $S=k\log W$; $dW=\exp(S/k)d\eta$. We expand S up to second order in ε. <u>We obtain a Gaussian in energy!</u>

$$\frac{dW}{d\varepsilon} = const \times \exp\left\{ -\frac{1}{2k}\left|\frac{d^2\sigma}{d\eta^2}\right|_0 \varepsilon^2 \right\}$$

$$\Delta\eta^2 \equiv \overline{(\eta-\eta_0)^2} = \overline{\varepsilon^2} = \left\{ \frac{1}{k}\left|\frac{d^2\sigma}{d\eta^2}\right|_0 \right\}^{-1}$$



In fact, the variance of the Gaussian energy distribution is given already by the „interpolation formula”:

$$\frac{d^2\sigma}{d\eta^2} = \frac{1}{m_\nu}\cdot\frac{d^2S}{dU^2} = \frac{1}{m_\nu}\frac{a}{U(b+U)}$$

$$\boxed{\Delta\eta^2 = h\nu\eta_0 + \frac{c^3}{8\pi\nu^2 d\nu}\cdot\frac{\eta_0^2}{\upsilon}}$$

S. V., Einstein’s fluctuation formula. A historical overview. *Fluctuation and Noise Letters*, 6 , No.2, R11-R46 (2006).

Connection with Planck‘s interpolation formula.
[M. von Laue on the fluctuation formula (1912).]

$$\frac{d^2\sigma}{d\eta^2} = \frac{1}{m_\nu} \cdot \frac{d^2 S}{dU^2} = \frac{1}{m_\nu} \frac{a}{bU + U^2}$$

Rayleigh-Jeans: Gauss, (continuous)

Wien: Poisson (discrete)

„Wave term” reponsible for „bunching”

„Particle term”

$$\Delta E^2 = h\nu \overline{E} + \frac{\overline{E}^2}{M}$$

Number of modes:

$$M = V Z_\nu d\nu = V \frac{8\pi\nu^2 d\nu}{c^3}$$

In the HBT-type experiment the number of modes are varied by shifting the detectors.

$$p_n = \frac{1}{1+\overline{n}} \left(\frac{\overline{n}}{1+\overline{n}} \right)^n$$

$$\Delta n^2 = \overline{n} + \frac{\overline{n}^2}{M}$$

„Particle term”

„Wave term”

Planck (1911): “Bose” (1924); geometric distribution.

In fact, Laue derived the fluctuation formula from the „Bose distribution“ for the many-mode case. He described the „photon bunching“ in thermal radiation in the same manner, as one often does nowadays.

S. V., Einstein’s fluctuation formula. A historical overview. *Fluctuation and Noise Letters*, 6 , No.2, R11-R46 (2006).

M. von Laue, Die Freiheitsgrade von Stahlenbündeln. Ann. Physik, 44, 1197-1212 (1914) [The degrees of freedom of bundles of rays.]

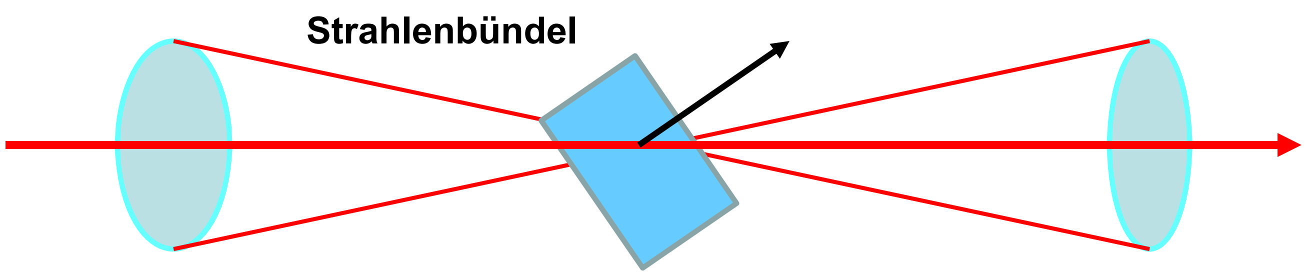
"Die Zahl der Freiheitsgrade eines linear polarisierten Strahlenbündels von der Länge *l*, der spektralen Breite dν, der Brennfläche *f* und dem körperlichen Winkel Ω, welches gegen die Normale von *f* die Neigung Θ hat, wird nach (5) [1])"

$$\frac{f\cos\Theta\cdot l\Omega\nu^2 d\nu}{c^3}$$

$$\frac{1}{c^3}\,f\cos\Theta\cdot l\Omega\nu^2 d\nu\cdot n^2\left(n+\nu\frac{dn}{d\nu}\right)$$

$$\frac{8\pi V\nu^2 d\nu}{c^3}$$

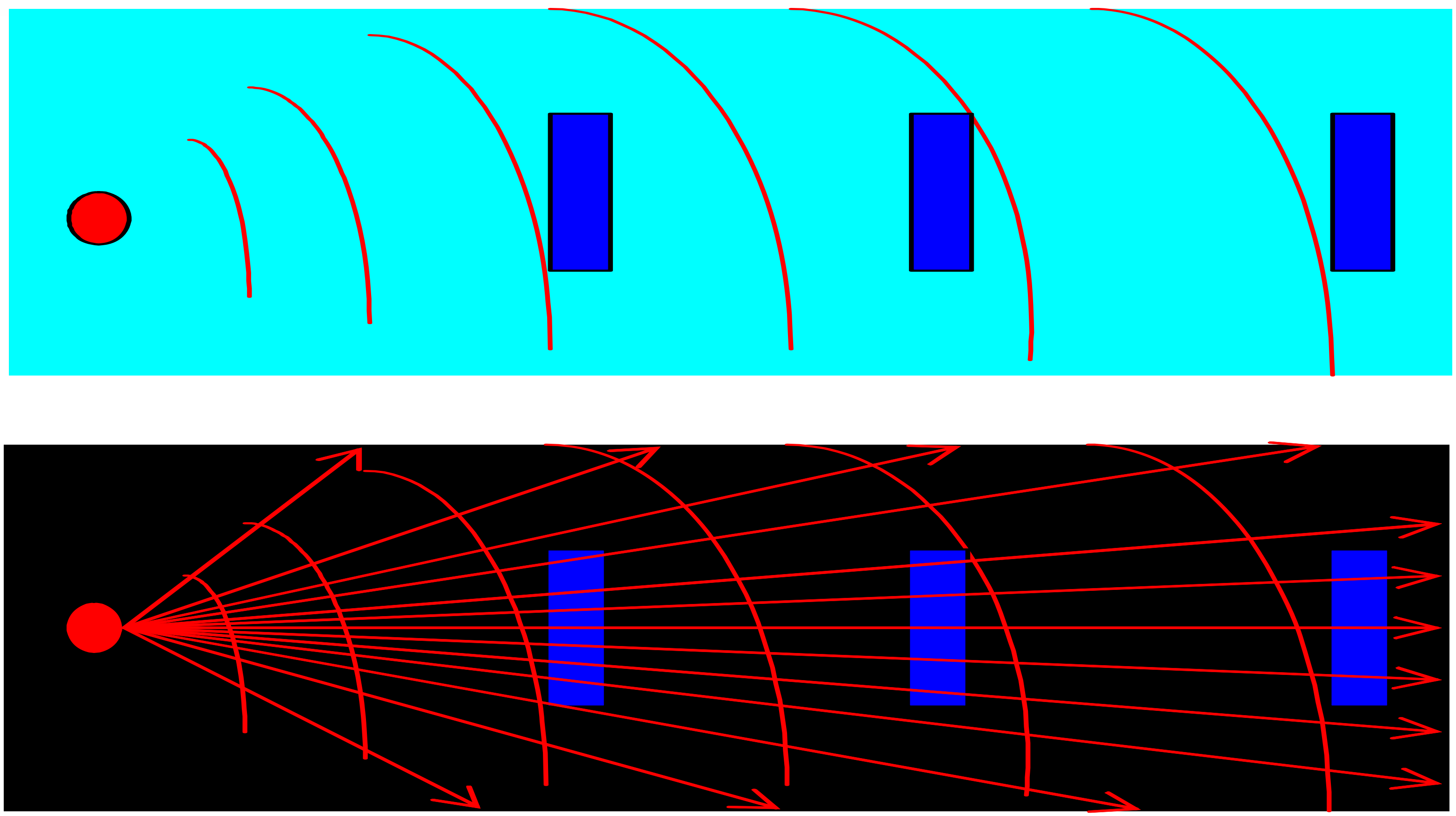
Hohlraum



Laue calculated the number of „independent Fourier coefficients" in conical sections of the radiation. This way of counting the number of the degrees of freedom has a close connection with optical resolution.

" 1) Für ein Strahlenbündel, welches zwei Flächen von 1 qcm verbindet, die in 100 cm Abstand senkrecht zu ihrem Abstand liegen, welches ferner die Wellenlänge 5 . 10^{-5} cm und eine Spektralbreite dν = 6 . 10^{7} sec^{-1} hat (die relative Breite dν/ν ist dann 10^{-7}), beträgt danach die Zahl der Freiheitsgrade 8000. "

Spatio-temporal localization versus Huygens principle. II.



Planck M, Das Wesen des Lichts. Vortrag gehalten in der Hauptversammlung der Kaiser-Wilhelm Gesellschaft am 28. 10. 1919. [Naturw. 7, S. 903-909 , 1919; Berlin, Springer, 1920.]

Spatio-temporal localization versus Huygens principle. I.

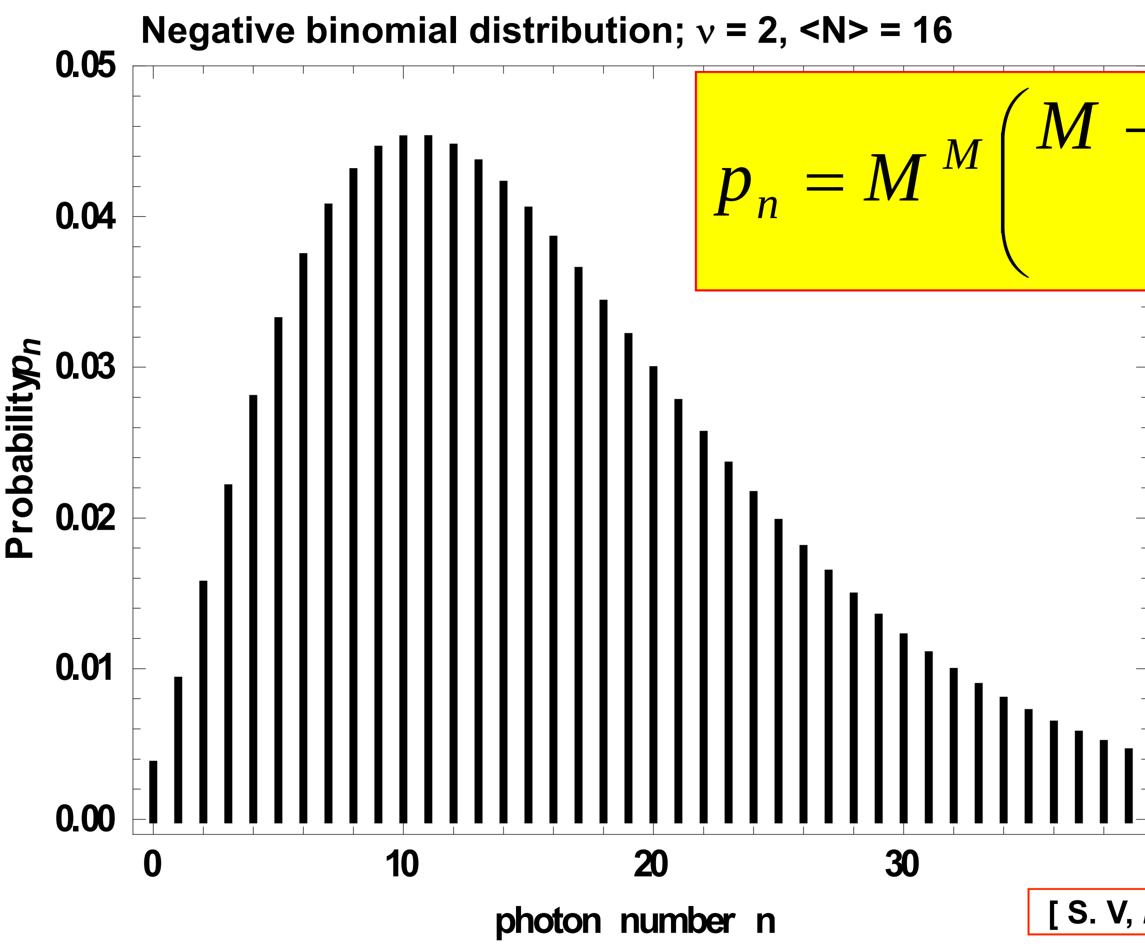
„Was aber der *Huygens*schen Wellentheorie eine scheinbar unüberwindliche Schwierigkeit bereitet, ist die von *Philipp Lenard* u. a festgestellte Tatsache, daß die Elektonengeschwindigkeit nicht etwa von der *Intensität* der Strahlung, sondern nur von der Wellenlänge derselben, also von der *Farbe* des verwendeten Lichtes abhägt, ...Rückt man also das Metall immer größere Entfernung von der Lichtquelle, ..., so fliegen trotz der schwächere Beleuchtung die Elektonen doch immer mit der nämlichen Geschwindigkeit heraus; ...

...woher nimmt ein herausfliegendes Elektron seine Bewegungsenergie, wenn schließlich die Entfernung von der Lichtquelle so groß wird, daß die Lichtintensität fast ganz verschwindet, während doch die Elektronen keine Spur einer Verminderung ihrer Geschwindigkeit zeigen? Es müßte sich hier offenbar handeln um eine Art Anhäufung der Lichtenergie auf die Stellen, wo die Elektronen abgeschleudert werden – eine Anhäufung, die der allseitigen gleichmäßigen Ausbreitung der elektromagnetischen Energie nach der *Huygens*schen Wellentheorie gänzlich fremd ist."

Planck M, Das Wesen des Lichts. Vortrag gehalten in der Hauptversammlung der Kaiser-Wilhelm Gesellschaft am 28. 10. 1919. [Naturw. 7, S. 903-909 , 1919; Berlin, Springer, 1920.]

Varró S, The forgotten heritage of Maxx Planck

Negative binomial distribution [Planck (1923)]. E.g. Photon number distribution in a two-mode Planck-Bose state.



$$p_n = M^M \binom{M-1+n}{n} \frac{\bar{n}^n}{(M+\bar{n})^{M+n}}$$

Fano factor:

$$F = \Delta n^2 / \bar{n}$$

$$F = 1 + \frac{\bar{n}}{M}$$

[S. V, *Physica Scripta* 90 (7), 074053 (2015)]

Planck M, Bemerkung zur Quantenstatistik der Energieschwankungen. *Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften*. S. 355-358 (1923).

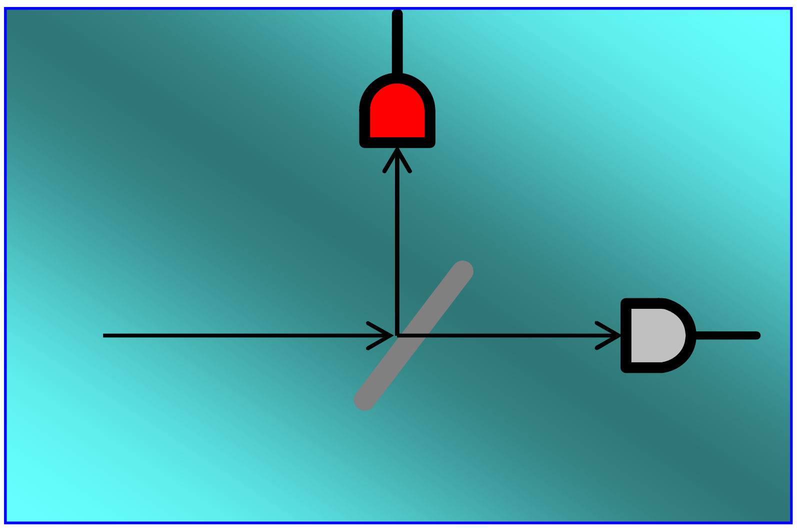
Hanbury Brown – Twiss correlations. Connection with the „interpolation formula”.

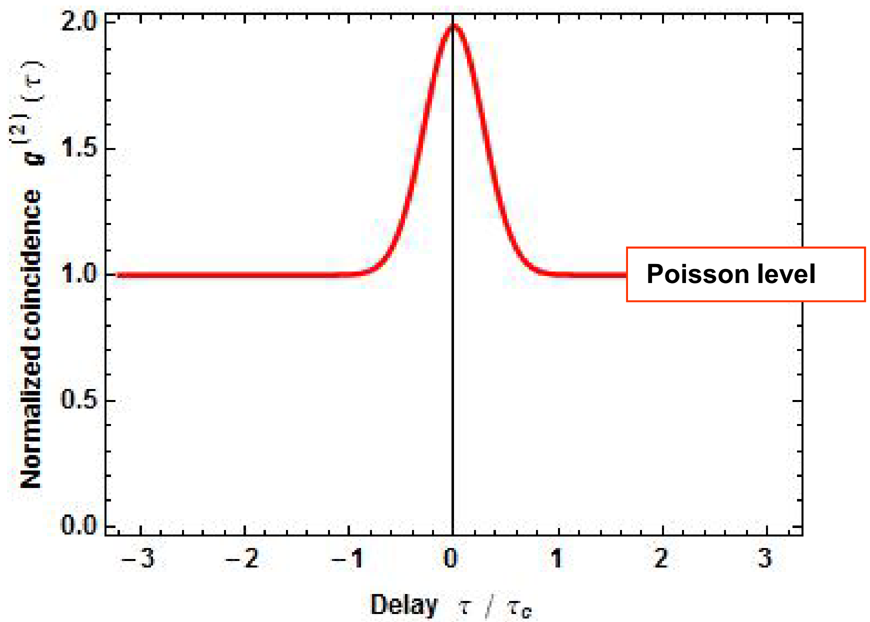
The right figure below shows the HBT effect for thermal states; usual ‘photon bunching’ (stemming from the ‘wave-like fluctuation’).

$$K = \frac{\overline{N_1 \cdot N_2}}{\overline{N_1} \cdot \overline{N_2}}$$

$$K = 1 + \frac{1}{\langle n \rangle}(F - 1)$$

$$K = 1 + \frac{1}{M}$$





Varró S, The role of self-coherence in correlations of bosons and fermions in linear counting experiments. Notes on the wave-particle duality; *Fortschritte der Physik – Progr. Phys.*; 59, No. 3–4, 296-324 (2011).

Boson correlations [He^4], [using the method of Planck and Laue] Fermion correlations [He^3] [Experiment; 2007]

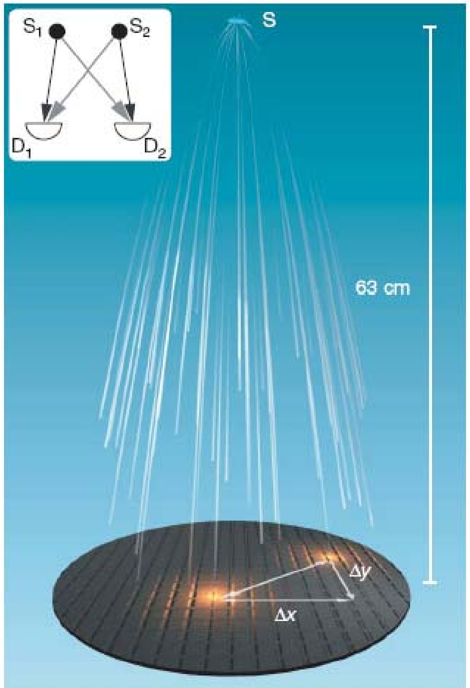


Figure 1 | The experimental set-up. A cold cloud of metastable helium atoms is released at the switch-off of a magnetic trap. The cloud expands and falls under the effect of gravity onto a time-r… detector (microchannel plate and delay-line … atoms. The horizontal components of the pai… and Δy. The inset shows conceptually the two … or grey) that interfere to give bunching or a… the initial positions of two identical atoms jo…

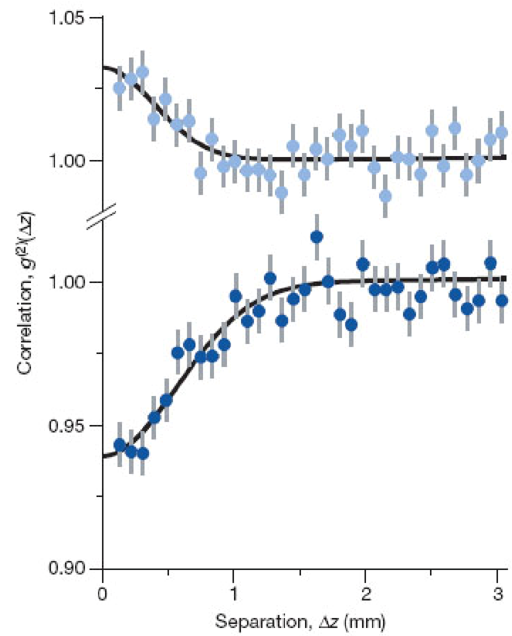


Figure 2 | Normalized correlation functions for $^4He^*$ (bosons) in the upper plot, and $^3He^*$ (fermions) in the lower plot. Both functions are measured at the same cloud temperature (0.5 μK), and with identical trap parameters. Error bars correspond to the square root of the number of pairs in each bin. …n. The bosons show a bunching effect, …g. The correlation length for $^3He^*$ is …for $^4He^*$ owing to the smaller mass. We …ngths of 0.75 ± 0.07 mm and …sons, respectively.

$$\frac{\overline{\xi\cdot\eta}}{\overline{\xi}\cdot\overline{\eta}} = 1 \pm \frac{1}{M} = 1 \pm \frac{1}{M_x M_y M_{l\ or\ t}}$$

T. Jeltes et al., Nature 445, 402–405 (2007). [S. V., The role of self-coherence in correlations of bosons and fermions. Notes on the wave – particle duality. *Fortschritte der Physik* 59, 296 – 324 (2011).]

Planck M., Energy fluctuations by superposition of periodic oscillations [1923]

Die Energieschwankungen bei der Superposition periodischer Schwingungen.

Von Max Planck.

Die Frage, nach welchem statistischen Gesetz die Energie einer gegebenen Anzahl von übereinandergelagerten periodischen Wellen mit gleichen Energieen und kleinen zufälligen Schwingungszahldifferenzen zeitlich hin und her schwankt, ist wohl noch niemals näher behandelt worden, vermutlich weil ihre allgemeine Lösung der Rechnung allzu große Schwierigkeiten bietet. Und doch bildet ihre Beantwortung eine wichtige Vorbedingung für ein näheres Eindringen in das zur Zeit noch dunkle Gebiet der Strahlungsschwankungen. Daher möchte ich im folgenden einen allgemeinen Ausdruck für dieses Gesetz aufstellen und denselben für einige besondere Fälle näher untersuchen.

M. Planck, Energieschwankungen bei der Superposition periodischer Schwingungen. Sitzungsber. der Preuss. Akad. der Wissenschaften , S. 350-364 (1923)

Fluktuációk lézernyalábban, termikus, koherens [Leonard Mandel,1965]$_5$

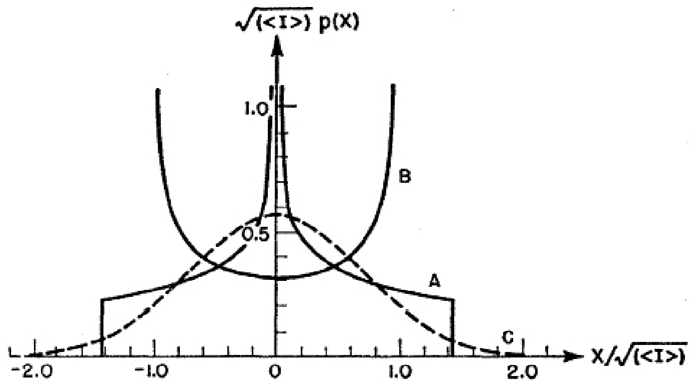


FIG. 3. Probability distributions of the classical wave amplitude for A, a two-mode laser field; B, a single-mode laser field; and C a polarized thermal field.

mode (Poisson) distribution having a single peak at $n\approx\langle n\rangle$, and the (Bose-Einstein) distribution for a polarized thermal field which decreases exponentially from $n=0$.

Finally let us make use of the distribution $P(U)$ given by (43) to calculate the distribution $p(X)$ of the ... he ... on of the instantaneous classical field amplitude. We have already noted that, for T very short compared with the reciprocal frequency spread of the light,

$$P_{Mandel-1965}(U)=W_{Planck-1923}(E)$$

by integration over Y,

$$\mathcal{P}(X)=\int_{-\sqrt{(2\langle I\rangle-X^2)}}^{\sqrt{(2\langle I\rangle-X^2)}}\frac{1}{\pi^2[\langle I\rangle^2-(X^2+Y^2-\langle I\rangle)^2]^{1/2}}dY,$$

$$X\leqslant\sqrt{(2\langle I\rangle)}.$$

With the help of the substitution $Y=[(2\langle I\rangle-X^2)\times(1-x^2)]^{1/2}$ the integral may be transformed to

$$\mathcal{P}(X)=\frac{1}{\pi^2}\sqrt{\left(\frac{2}{\langle I\rangle}\right)}\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}\sqrt{(1-x^2[1-X^2/2\langle I\rangle])}}$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\sqrt{\left(\frac{2}{\langle I\rangle}\right)}K[\sqrt{(1-X^2/2\langle I\rangle)}]\quad\text{for}\quad X^2\leqslant 2\langle I\rangle,$$

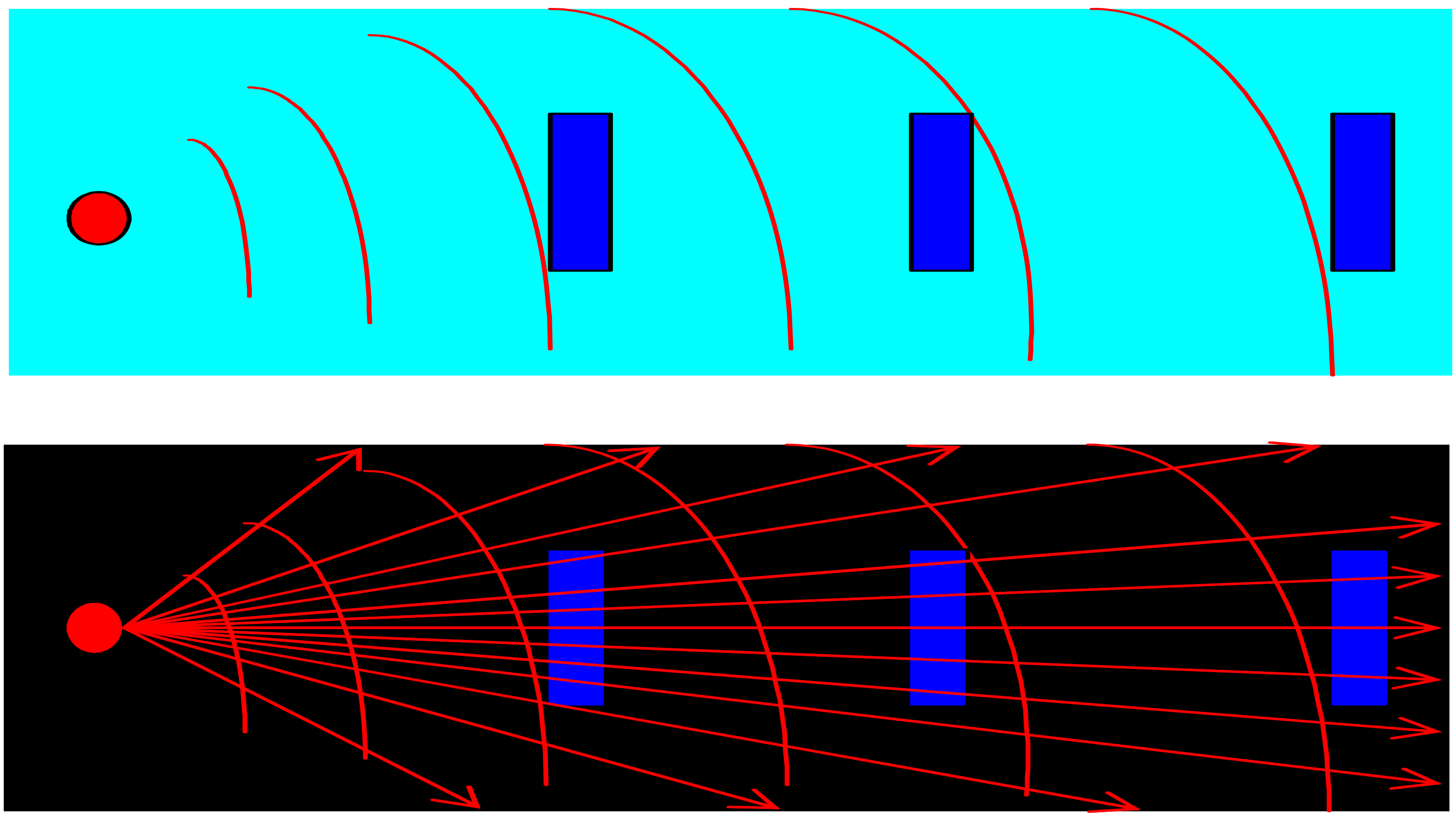
$$=0\quad\text{otherwise,}\tag{48}$$

where K is the complete elliptic integral of the first kind. This distribution is illustrated in Fig. 3, where the corresponding probability distributions for a single-mode laser beam and a beam from a polarized thermal source are shown for comparison.[38] The same distribution (48) was also found by Hodara[39] for the superposition of two strictly sinusoidal oscillations with random phases.

L. Mandel,. Phys. Rev.138, B753-B762 (1965)

[38] L. Mandel, *Quantum Electronics, III* (Columbia University Press, New York, 1964), p. 101.
[39] H. Hodara (to be published).

Spatio-temporal localization versus Huygens principle. II.



Planck M, Das Wesen des Lichts. Vortrag gehalten in der Hauptversammlung der Kaiser-Wilhelm Gesellschaft am 28. 10. 1919. [Naturw. 7, S. 903-909 , 1919; Berlin, Springer, 1920.]

Varró S, The forgotten heritage of Maxx Planck

Spatio-temporal localization versus Huygens principle. I.

„Was aber der *Huygens*schen Wellentheorie eine scheinbar unüberwindliche Schwierigkeit bereitet, ist die von *Philipp Lenard* u. a festgestellte Tatsache, daß die Elektonengeschwindigkeit nicht etwa von der *Intensität* der Strahlung, sondern nur von der Wellenlänge derselben, also von der *Farbe* des verwendeten Lichtes abhägt, ...Rückt man also das Metall immer größere Entfernung von der Lichtquelle, ..., so fliegen trotz der schwächere Beleuchtung die Elektonen doch immer mit der nämlichen Geschwindigkeit heraus; ...

...woher nimmt ein herausfliegendes Elektron seine Bewegungsenergie, wenn schließlich die Entfernung von der Lichtquelle so groß wird, daß die Lichtintensität fast ganz verschwindet, während doch die Elektronen keine Spur einer Verminderung ihrer Geschwindigkeit zeigen? Es müßte sich hier offenbar handeln um eine Art Anhäufung der Lichtenergie auf die Stellen, wo die Elektronen abgeschleudert werden – eine Anhäufung, die der allseitigen gleichmäßigen Ausbreitung der elektromagnetischen Energie nach der *Huygens*schen Wellentheorie gänzlich fremd ist.”

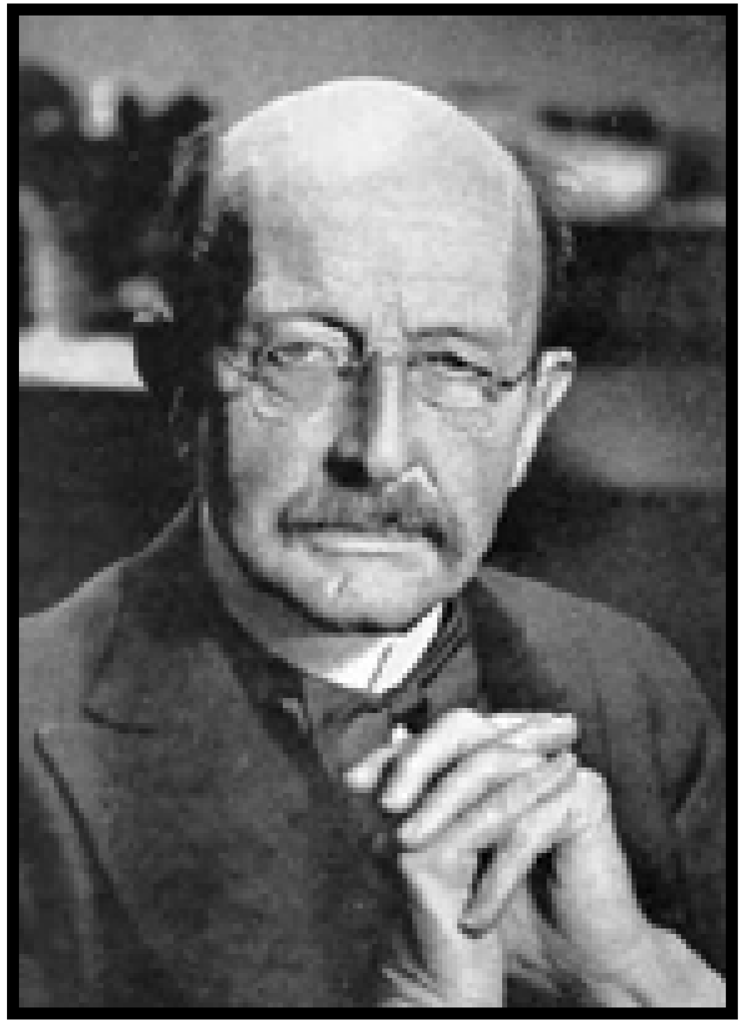
Planck M, Das Wesen des Lichts. Vortrag gehalten in der Hauptversammlung der Kaiser-Wilhelm Gesellschaft am 28. 10. 1919. [Naturw. 7, S. 903-909 , 1919; Berlin, Springer, 1920.]

Planck's character.

be measured only against the achievements of Johannes Kepler and Isaac Newton."[40]

Einstein was disappointed by the lack of support from his colleagues at the academy (although he could hardly have expected their favor after *he* had rejected them by his preemptive resignation). With a touch of sour grapes, he wrote in a letter to Haber, "They were not able to disappoint me, because I never had respect or sympathy for them—with the exception of a few pure personalities (Planck 60 percent noble and Laue 100 percent)."[41] This was patently unfair to Planck, who had nobility to spare. As Lise Meitner later said in her sketch of Planck's character, "He had an unusually pure disposition and inner rectitude, which corresponded to his outer simplicity and lack of pretension . . . Again and again I saw with admiration that he never did or avoided doing something that might have been useful or damaging to himself. When he perceived something to be right, he carried it out, without regard for his own person."[42]

An important heritage [Lise Meitner on Planck's personality. Quoted from Hans C. Ohanian, *Einstein's Mistakes. The human failings of genius.* (W W Norton & Company, New York, 2008)]



“Was mich in der Physik von jeher vor allem interessierte, waren die großen allgemeinen Gesetze, die für sämtliche Naturforgänge Bedeutung besitzen, unabhängig von den Eigenschaften der an den Vorgängen beteiligten Körper.”

I thank many discussions with Professors Gy. Farkas, P. Varga, M. Jánossy, P. Király, W. Schleich, H. Rauch and M. Bonitz.
This work has been supported by the Hungarian Academy of Sciences, and partially by the ELI-ALPS project. The ELI-ALPS project (GOP-1.1.1-12/B-2012-0001, GINOP-2.3.6-15-2015-00001) is supported by the European Union and co-financed by the European Regional Development Fund.

Appendices

Sándor Varró, Black-body radiation and the forgotten heritage of Max Planck.

Abstract.

Besides the discovery of the fourth fundamental physical constant *h*, Max Planck (1858-1947) has solved various important problems in physics. Our point is that, beyond their mere historical interest, Planck's several forgotten results still may have relevance even in the everyday practice of modern physics, including for instance wave propagation, laser noise or general phase-space quantization.
On the occasion of his 160th birthday, first, we keep track of Planck's lesser known original thoughts concerning the black-body radiation problem, and we shall also deal with his second theory, which already contained the concept of induced emission and the zero-point energy. We also show Planck's original derivation of the natural system of units (Planck length, mass, time and temperature), which plays a distinguished role in cosmological physics.

{*Plenary talk delivered at Planck 2018 Memorial Scientific Symposium* [*10-11 October 2018, Hungarian Academy of Sciences, Central Building, Széchenyi square 9, Budapest, Hungary*]}

References.

Varró S, A foton 100 éve. I. Kezdő lépések és néhány fejlemény. In „A kvantumoptika és kvantum elektronika legújabb eredményei" Eds.: Zs. Heiner and K. Osvay, pp. 9-35 (SZTE, Szeged, 2006): A VII. Kvantumelektronika Iskola (2005. Május 31 – július 3., Balatonfüred) .

Varró S : Einstein's fluctuation formula. A historical overview.
Fluctuation and Noise Letters, **6** , No.2, R11-R46 (2006), http:// arxiv.org : quant-ph/0611023

Varró S : A study on black-body radiation: classical and binary photons.
Acta Physica Hungarica B: Quantum Electronics **26**, Nos. 3-4., 365-389 (2006)
http://arxiv.org : quant-ph/0611010

Varró S : Irreducible decomposition of Gaussian distributions and the spectrum of black-body radiation.
Physica Scripta, **75**, 160-169 (2007) , http://arxiv.org : quant-ph/0610184

Varró S : Correlations in single-photon experiments.
Fortschritte der Physik, **56**, No. 1, 91-102 (2008), http://arxiv.org : arXiv: 0707.1305v1 [quant-ph]

Varró S; The role of self-coherence in correlations of bosons and fermions in linear counting experiments. Notes on the wave-particle duality;
Fortschritte der Physik – Progr. Phys.; **59**, No. 3–4, 296-324 (2011). E-print: arXiv: 1004.2975 [quant-ph];

Varró S, The digital randomness of black-body radiation.
Journal of Physics Conference Series **414**, 012041 (2013). doi:10.1088/1742-6596/414/1/012041
E-print: arXiv 1301.1997 [quant-ph]

Planck's 'third theory'. [It also offers the first theoretical interpretation of the Franck-Hertz experiment.]

„Wenn nun diese Bedingung [qr < f] erfüllt ist und ein Zusammenstoß erfolgt, so soll der Energieaustausch zwischen Partikel und Oszillator stets in der Weise stattfinden, daß der Oszillator seine ganze augenblickliche Schwingungsenergie an die Partikel abgibt, während gleichzeitig die Partikel nur das größte Vielfache des Energiequantums $h\nu$, welches in ihrere kinetischen Energie enthalten ist, an den Oszillator abgibt. Wenn also z. B. die kinetische Energie der Partikel kleiner ist als $h\nu$, so gibt sie gar keine Energie an den Oszillator ab[1].

„...Thus, e.g. if the kinetic energy of the particle is smaller than $h\nu$, then it does not give energy to the oscillator at all."

Fußnote[1]: Diese Hypothese erhält eine experimentelle Stütze durch die wichtigen Resultate der neuesten Untersuchungen von J. Franck und G. Hertz, Verh. d. D. Physik. Ges. 16, S. 512, 1914."

Max Planck, Eine veränderte Formulierung der Quantenhypothese. *Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften*, 1914, 918-923 (1914). (Vorgetragen am 23. Juli 1914)

Z. Donkó, „The experiment of J. Franck and G. Hertz, 100 years ago and today”. [Planck’s third theory is the first explaination of the Franck Hertz experiment.]

PHYSICAL REVIEW E **85**, 056409 (2012)

Photoelectric Franck-Hertz experiment and its kinetic analysis by Monte Carlo simulation

Péter Magyar, Ihor Korolov, and Zoltán Donkó
Research Institute for Solid State Physics and Optics of the Hungarian Academy of Sciences, P.O.B. 49, H-1525 Budapest, Hungary

(Received 21 December 2011; revised manuscript received 20 April 2012; published 18 May 2012)

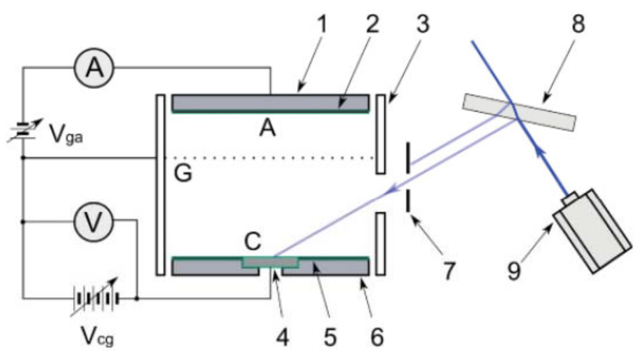


FIG. 1. (Color online) Experimental apparatus: the FH cell, the electrical connections, and the scheme of laser illumination. 1: anode disk, 2, 5: Mo plates, 3: confining (Al) cylinder, 4: Mg disk, 6: cathode disk, 7: slit, 8: quartz plate, 9: laser, G: grid. The vacuum chamber is not shown.

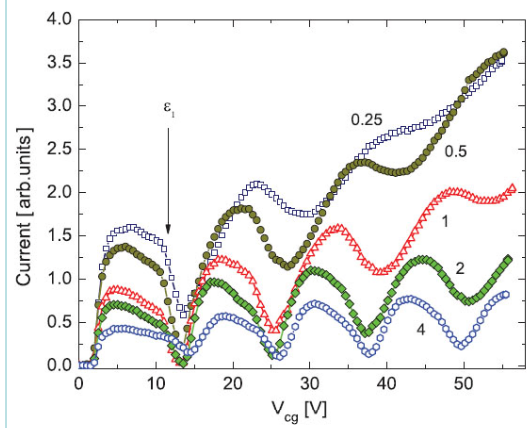


FIG. 2. (Color online) Experimental results: the FH characteristics for different pressures. The labels of the curves give the pressure in mbar; the arrow shows the first excitation level of Ar atoms.

J. Franck und G. Hertz, Über die Erregung der Quecksilberresonanzlinie 253,6 mm durch Elektronenstösse. *Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft* 16. Jahrg. 15. April 1914., Nr. 7., Seiten 512-517 (1914). Z. Donkó, „The experiment of J. Franck and G. Hertz, 100 years ago and today”. Talk at Seminar of SZFI, Wigner RCP (2014).

Planck on plasma partition function

Max Planck and Albrecht Unsöld on plasma partition functions and lowering of ionization energy

W. Ebeling*

Institut für Physik, Humboldt-Universität Berlin, Berlin, Germany

***Correspondence**
W. Ebeling, Institut für Physik, Humboldt-Universität Berlin, Newtonstr. 15, 12489 Berlin, Germany.
Email: werner_ebeling@web.de

We summarize the work devoted to plasma thermodynamics and ionization theory performed by two protagonists working at Kiel University: Max Planck and Albrecht Unsöld. First we show that Planck developed, in Kiel, the basis for describing the chemical equilibria between charged particles (ions) and formulated later, in Berlin, the first complete version of the theory of ionization equilibria in plasmas with a convergent partition function. Abrecht Unsöld studied, in Kiel, the influence of plasma density on the atomic partition function, investigating the electric microfield between the ions. He showed that this effect leads to a lowering of the ionization energy going with the cubic root of the density. Finally, we discuss briefly recent theoretical and experimental work on the ionization potential depression.

KEYWORDS

Albrecht Unsöld, ionization theory, Kiel University, Max Planck, plasma thermodynamics

Ebeling W, *Contributions to Plasma Physics* 2017; 57:441–451. [M. Planck, *Ann. Phys*. 1898, 34, 139. , M. Planck, *Annalen der Physik* 1924, 75, 673.]

Planck M., Energy fluctuations by superposition of periodic oscillations [1923]

Das Problem läßt sich allgemein folgendermaßen formulieren. Wenn eine gegebene Anzahl p von periodischen Wellen mit der nämlichen Energie ε und nahezu gleicher Frequenz sich übereinanderlagert, so werden wegen der gegenseitigen Interferenz in der resultierenden Energie Schwankungen auftreten, und die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Energie der resultierenden Schwingung zu irgendeiner Zeit einen zwischen E und $E + dE$ befindlichen Wert besitzt, wird durch einen Ausdruck von der Form $W(E) \cdot dE$ gegeben sein, wobei:

$$\int_0^\infty W(E) \cdot dE = 1 . \qquad (1)$$

Es handelt sich darum, die Funktion $W(E)$ zu finden, für jeden gegebenen Wert der ganzen Zahl p.

Nehmen wir zunächst $p = 1$, so haben wir den trivialen Fall einer einzigen Schwingung mit der Energie ε. Die resultierende Energie E ist dann konstant $= \varepsilon$, und die entsprechende Wahrscheinlichkeitsfunktion $W_1(E)$ ist für alle Werte von E gleich Null, mit Ausnahme des Wertes $E = \varepsilon$, für welchen sie unendlich groß wird.

Für $p = 2$ setzen sich die beiden Schwingungen zusammen zu einer einzigen Schwingung mit periodisch wechselnder Amplitude, d. h. sie bilden periodische Schwebungen. Nach dem Interferenzgesetz ist dann die resultierende Energie:

$$E = 2\varepsilon + 2\varepsilon \cos \phi = 4\varepsilon \cos^2 \frac{\phi}{2} , \qquad (2)$$

„A probléma a következőképpen fogalmazható meg általánosan. Ha egy adott p számú, ugyanolyan energiájú és közelítőleg azonos frekvenciájú periodikus hullám szuperponálódik, akkor az eredő energiában ingadozások lépnek fel az interferencia miatt, és annak a valószínűsége hogy valamely időben ez E és E + dE értékek között van W(E)dE alakban fejezhető ki, ahol… (1)… Arról van szó, hogy a W(E) függvényt megtaláljuk minden adott értékű egész p számra."

M. Planck, Energieschwankungen bei der Superposition periodischer Schwingungen. ***Sitzungsber. der Preussischen Akademie der Wissenschaften*** **, S. 350-364 (1923)**

Planck M., Energiafluktuációk periodikus rezgések szuperpozíciójánál [1923]

[illegible] die langsam und proportional der Zeit sich ändernde Phasendifferenz [illegible] Partialschwingungen bedeutet. Um eine eindeutige Zuordnung der [illegible] E und ϕ zu erzielen, können wir $0 < \phi < \pi$ annehmen, wobei dann ϕ [illegible] den beiden Grenzen 0 und π mit konstanter Geschwindigkeit hin [illegible] schwankt. Dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß in einem be- [illegible] herausgegriffenen Zeitpunkt die Phasendifferenz zwischen ϕ und $\phi + d\phi$ [illegible] gleich $\frac{d\phi}{\pi}$, und dementsprechend, mit Einführung von E und dE statt [illegible] $d\phi$ aus (2), die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$\frac{d\phi}{\pi} = W_2(E)\,dE = \frac{1}{\pi}\frac{dE}{\sqrt{4\varepsilon E - E^2}}. \tag{3}$$

Dieser Ausdruck ist deshalb besonders bemerkenswert, weil die extremen Werte von E, nämlich 0 und 4ε, eine unendlich große Wahrscheinlichkeit besitzen, selbstverständlich ohne daß dadurch die Gleichung (1) verletzt wird, während diejenigen Werte von E, welche dem Mittelwert

$$\overline{E} = \int_0^{4\varepsilon} E \cdot W_2(E) \cdot dE = 2\varepsilon \tag{4}$$

naheliegen, verhältnismäßig am seltensten vorkommen. Für alle Werte von $E > 4\varepsilon$ ist die Wahrscheinlichkeit $W_2 = 0$.

M. Planck, Energieschwankungen bei der Superposition periodischer Schwingungen. Sitzungsber. der Preuss. Akad. der Wissenschaften , S. 350-364 (1923)

Composition formula for the distribution of the total energy of the superposition of waves having the same energy ε.

$$E = E' + \varepsilon + 2\sqrt{\varepsilon E'}\, cos\,\phi$$

$$\frac{d\phi}{\pi} = \frac{dE}{\pi\sqrt{4\varepsilon E' - (E - E' - \varepsilon)^2}}$$

$$\boxed{W_{p+1}(E) = \frac{1}{\pi}\int \frac{W_p(E')dE'}{\sqrt{\{(E^{1/2} + \varepsilon^{1/2})^2 - E'\}\{E' - (E^{1/2} - \varepsilon^{1/2})^2\}}}}$$

$$E'_{min} = (E^{1/2} - \varepsilon^{1/2})^2 \qquad E'_{max} = (E^{1/2} + \varepsilon^{1/2})^2 \qquad E'_{max'} = p^2\varepsilon$$

$$W_3(E) = \frac{1}{\pi}\int \frac{dE'}{\sqrt{E'(4\varepsilon - E')\cdot\{(E^{1/2} + \varepsilon^{1/2})^2 - E'\}\{E' - (E^{1/2} - \varepsilon^{1/2})^2\}}}$$

M. Planck, Energieschwankungen bei der Superposition periodischer Schwingungen. Sitzungsber. der Preuβ. Akad. der Wissenschaften , S. 350-364 (1923). Eq. (7): rekurziós formula W_p (E) – re.

p = 3 módus esetén W_3 (E) Elliptikus Integrál

$$F(\varphi,k)=\int_0^{\varphi}\frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}$$

geben wird, so kann ma... für $p=2$ durch (3) gebeliebigen Wert von p ...sgehend $W_p(E)$ für jeden gelöst. Allerdings führt ...te Problem ist prinzipiell ...komplizierte Funktionen.

Für $p=2$ erhält man z. B. aus (7) mit Benutzung von (3):

$$W_3(E)\,dE=\frac{dE}{\pi^2}\cdot\int\frac{dE'}{\sqrt{E'(4\varepsilon-E')\cdot\{(\sqrt{E}+\sqrt{\varepsilon})^2-E'\}\cdot\{E'-(\sqrt{E}-\sqrt{\varepsilon})^2\}}}\,,\qquad(9)$$

ein elliptisches Integral erster Gattung, welches sich nach (8) für $0<E<\varepsilon$ auf ~~die Normalform~~

$$K(k)\equiv F\left(\frac{\pi}{2},k\right)$$

$$\frac{\varkappa\cdot dE}{2\pi^2\sqrt{\varepsilon\sqrt{\varepsilon E}}}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\phi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\phi}}\qquad(10)$$

$$\text{mit}\quad\frac{1}{\varkappa^2}=1+\frac{(3\sqrt{\varepsilon}+\sqrt{E})\cdot(\sqrt{\varepsilon}-\sqrt{E})^3}{16\,\varepsilon\sqrt{\varepsilon E}}\,,\qquad(11)$$

für $\varepsilon<E<9\varepsilon$ auf die Normalform

M. Planck, Energieschwankungen bei der Superposition periodischer Schwingungen. Sitzungsber. der Preuβ. Akad. der Wissenschaften , S. 350-364 (1923). Eqs. (9-10-11): p=3, Elliptic Integral of first kind W_3 (E) .

Fluktuációk lézernyalábban, termikus, koherens [L. Mandel,1965][1]

PHYSICAL REVIEW VOLUME 138, NUMBER 3B 10 MAY 1965

Phenomenological Theory of Laser Beam Fluctuations and Beam Mixing*

L. MANDEL

Department of Physics and Astronomy, University of Rochester, Rochester, New York

(Received 16 December 1964)

The paper contains a quantum theoretical analysis of laser beam fluctuations and of the light beat experiments with two lasers. With the help of experimental results on photon counting fluctuations in a single-mode laser field, some correlation properties of the field are derived. It is shown that the correlation equations are satisfied by states of the field which are much more general than "coherent" states. The equations lead directly to the spectral density of the intensity operator in the light beat experiments, which can be obtained from photoelectric measurements. The resulting expression is practically identical to that found by Forrester for light having thermal statistical properties. The reasons for this are discussed by a comparison of the corresponding probability distributions of photon counts and of the classical wave amplitude.

1. INTRODUCTION

THE problem of determining the optical spectrum of a laser beam from beat experiments with two or more lasers is of interest, not only because of its practical importance, but because it involves the fluctua- excursion of the beat notes, reflected in the spectral range of the photoelectric signals, as a measure of the spectral width of the light itself. To an order of magnitude this measure will undoubtedly be valuable. However, in order to arrive at a quantitative relation be-

* This research was supported in part by the U. S. Army Research Office (Durham) and by the U. S. Air Force Cambridge Research Laboratories.

L. Mandel, Phys. Rev.138, B753-B762 (1965)

Fluctuations in laser beams, termikus, koherens [L. Mandel,1965]$_2$

$$P(U)=\iiint f_1(\{v_{\mathbf{k},s}'\})f_2(\{v_{\mathbf{k},s}''\})\delta[B-|V_j'(\mathbf{x},t)|]\delta[B-|V_j''(\mathbf{x},t)|]$$
$$\times\delta[V_j(\mathbf{x},t)-V_j'(\mathbf{x},t)-V_j''(\mathbf{x},t)]\delta[U-V_j^*(\mathbf{x},t)V_j(\mathbf{x},t)ScT]d^2\{v_{\mathbf{k},s}\}d^2\{v_{\mathbf{k},s}'\}d^2\{v_{\mathbf{k},s}''\}$$
$$=\iint f_1(\{v_{\mathbf{k},s}'\})f_2(\{v_{\mathbf{k},s}''\})\delta[U-2B^2ScT(1+\cos(\theta'-\theta''))]d^2\{v_{\mathbf{k},s}'\}d^2\{v_{\mathbf{k},s}''\}, \qquad (41)$$

where

$$\arg V_j'(\mathbf{x},t)=\theta'$$
$$\arg V_j''(\mathbf{x},t)=\theta''.$$

We have already noted in connection with Eq. (14b) that stationarity is assured if the functions $f_1(\{v_{\mathbf{k},s}'\})$ and $f_2(\{v_{\mathbf{k},s}''\})$ are such that the phases θ' and θ'' are uniformly distributed over 0 to 2π. The difference $\theta'-\theta''$ is therefore also distributed at random over 0 to 2π, and since according to (41),

$$U=2B^2ScT[1+\cos(\theta'-\theta'')], \qquad (42)$$

$$P(U)=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{B^2ScT\sin(\theta'-\theta'')}$$

$$=\frac{1}{\pi[(2B^2ScT)^2-(U-2B^2ScT)^2]^{1/2}}$$

$$\text{for}\quad 0\leqslant U\leqslant 4B^2ScT, \qquad (43)$$

and

$$P(U)=0\quad\text{otherwise.}$$

The constant $2B^2ScT$, or $2\langle I_1(\mathbf{x},t)\rangle ScT$, is the expectation value $\langle U\rangle$ of U. Apart from the factor ScT, U itself now corresponds to the light intensity in the classical description of the beam. The distribution $P(U)$ is evident from the density operator (14) for the single-mode field that the corresponding $p(U)$ must be a δ function. For the polarized thermal field one obtains an exponential distribution.[35]

We may now use (43) to calculate the counting distribution $p(n)$ from (39). We then obtain

$$p(n)=\int_0^{2\langle U\rangle}\frac{U^ne^{-U}}{\pi n![2U\langle U\rangle-U^2]^{1/2}}dU. \qquad (44)$$

For very large values of $\langle U\rangle$ this distribution has a minimum at $n\approx\langle U\rangle$, and peaks at $n=0$ and $n\approx2\langle U\rangle$. It should be compared[24] with the corresponding one-

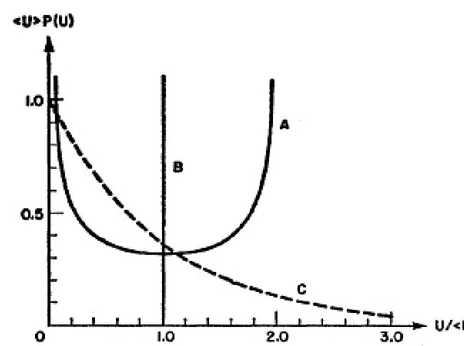


FIG. 2. The probability distributions of U for A, a two-mode

The distribution P(U), derived by Mandel is nothing else but Planck's W(E) function, their physical meanings coincide, too. [L. Mandel, Phenomenological theory of laser beam fluctuations and beam mixing. Phys. Rev.138, B753-B762 (1965)]

L. Mandel, Phenomenological theory of laser beam fluctuations and beam mixing. Phys. Rev.138, B753-B762 (1965)

Fluktuációk lézernyalábban, termikus, koherens [L. Mandel,1965]$_3$

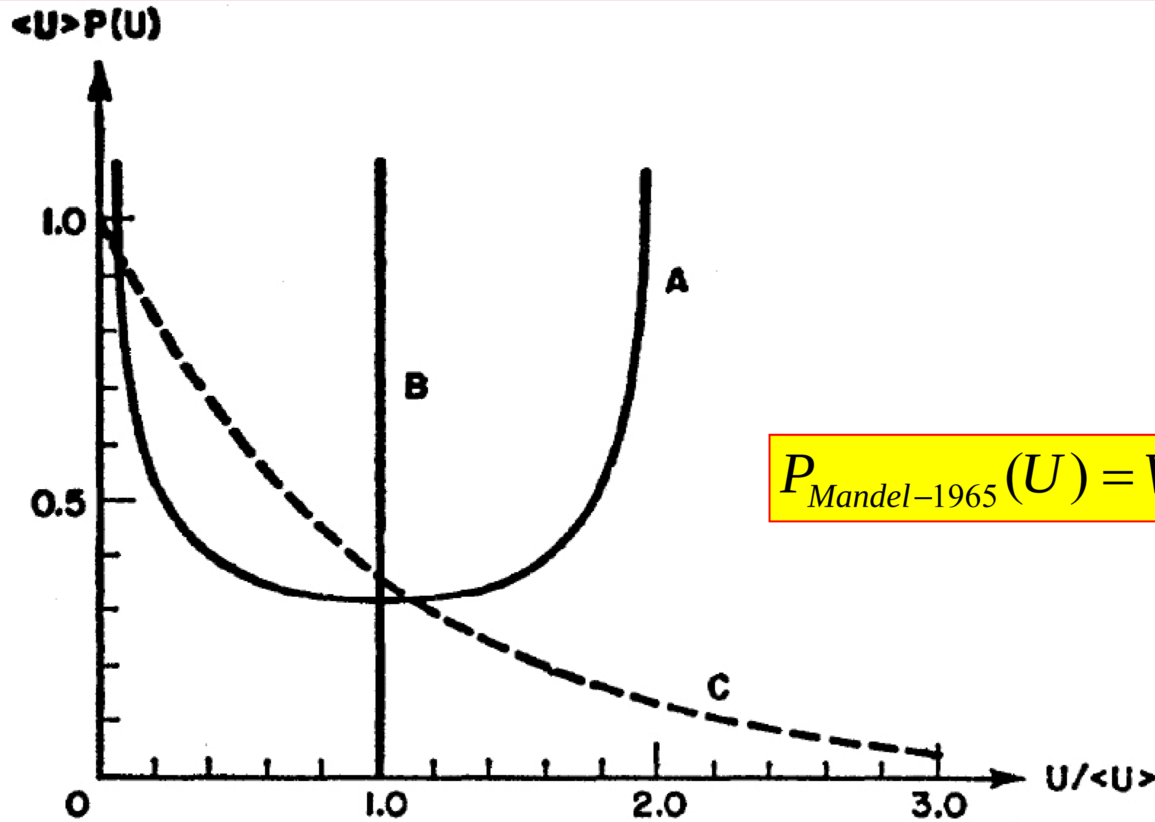


FIG. 2. The probability distributions of U for A, a two-mode laser field; B, a single-mode laser field; and C, a polarized thermal field.

$$P_{Mandel-1965}(U) = W_{Planck-1923}(E)$$

L. Mandel, Phenomenological theory of laser beam fluctuations and beam mixing. Phys. Rev.138, B753-B762 (1965)

Planck on electron diffusion

EMERGENT BEHAVIOUR IN ELECTRODIFFUSION: PLANCK'S OTHER QUANTA

L. BASS and A. J. BRACKEN

Department of Mathematics, School of Mathematics and Physics
The University of Queensland, Brisbane 4072, Australia
(e-mails: lb@maths.uq.edu.au, a.bracken@uq.edu.au)

(*Received July 9, 2013 – Revised August 20, 2013*)

A well-established nonlinear continuum model of time-independent electrodiffusion describes the migrational and diffusional transport of two ionic species, with equal and opposite valences, across a liquid junction. The ionic charge densities provide the source for a static electric field, which in turn feeds back on the charges to contribute the migrational component of the ionic transport. Underpinning the model is a form of the second Painlevé ordinary differential equation (PII). When Bäcklund transformations, extended from those known in the context of PII, are applied to an exact solution of the model first found by Planck, a sequence of exact solutions emerges. These are characterized by corresponding ionic flux and current densities that are found to be quantized in a particularly simple way. It is argued here that this flux quantization reflects the underlying quantization of charge at the ionic level: the nonlinear continuum model 'remembers' its discrete roots, leading to this emergent phenomenon.

Keywords: emergent behaviour, nonlinear electrodiffusion, Bäcklund transformations, flux quantization, Painlevé II equation.

L. BASS and A. J. BRACKEN, *REPORTS ON MATHEMATICAL PHYSICS* Vol. 73 (2014) pp 65-75.
[W. Nernst: *Z. Phys. Chem. 2 (1888), 613.*, M. Planck: *Ann. Phys. Chem. 39 (1890), 161.*